解説論文

リウヴィルの定理の一般化

Generalization of Liouville's Theorem

神 永 正 博*
Masahiro KAMINAGA

Abstract: This note presents a generalization of the Liouville's theorem in complex analysis. The Liouville's theorem states that every bounded entire function must be constant. It is well known that the real and imaginary part of any holomorphic function satisfy the Laplace equation. Using Schwartz distributions, we show that every bounded solution u of a partial differential equation $P(D)u = 0$ must be constant, if its symbol $P(\xi)$ has an unique real root at the origin.

Keywords: Complex analysis, Liouville's theorem, Schwartz distributions, Fourier analysis

1 はじめに

偏微分方程式論の立場から, 複素関数論のリウヴィルの定理を一般化する. 一般化しても工学的な応用があるというわけではないが, リウヴィルの定理がなぜ成り立つのか, 一段高いレベルで理解することができる. また, 本解説は, 超関数とそのフーリエ変換への短い導入としても読むことができる. 勉学, 教育, 研究, 雑用の気晴らしに読んでいただければ幸いである.

最初にリウヴィルの定理を簡単に復習しよう.

定理 1. (リウヴィルの定理) 有界な整関数 $f(z)$ は定数関数に限る.

証明. コーシーの積分公式：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

を思い出そう. ここで, C は, z を内部に含む単純閉曲線である. $n = 1$ とし, $C = C_r$ を z を中心とし半径 $r > 0$ の円に半時計まわりを正の向きとしたものとすれば,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(\zeta)|}{r^2} r\,d\theta \\ &= \frac{\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|}{r} \end{aligned}$$

r はいくらでも大きく取れるので, $f'(z) = 0$ となる. つまり, $f(z)$ は定数である. □

証明を見れば, $f(z)$ が多項式増大度を持つ（ある正の定数 M と 0 以上の整数の定数 N があって, $|f(z)| \leq M|z|^N$ が成り立つ）ならば, $f^{(n)}(z) = 0 (n > N)$ となることが分かるから, $f(z)$ は, 高々 N 次の多項式であることも分かる.

複素関数論の定理はシンプルなものが多いが, リウヴィルの定理のシンプルさはまた格別と思う. ここで, 整関数とは, 全複素平面で正則（微分可能）な関数のことである. リウヴィルの定理の応用の一つとして代数学の基本定理がある.

定理 2. (代数学の基本定理) 定数でない任意の一変数多項式には複素根が存在する.

証明. 考えている多項式を $f(z)$ とする. $f(z)$ が, 全複素平面上で 0 にならなければ, $g(z) = 1/f(z)$ は全複素平面上で正則かつ有界である. リウヴィルの定理より, $g(z)$ は定数でなければならず, 結果, $f(z)$ も定数となり, 仮定に反する. □

*東北学院大学電気情報工学科, 同大学院電気工学専攻

リウヴィルの定理の証明は, コーシーの積分公式から導かれた. しかし, リウヴィルの定理の証明の本質は, f が複素関数であることにあるのであろうか. 数学では, 定理が成り立つ本質的な理由は何か, ということを追求することが多い. ここでも, リウヴィルの定理の本質が一体何なのかを（線形の）偏微分方程式論の立場から追求してみたい. 一般化のために, 偏微分方程式を解析する基本的な道具である超関数とそのフーリエ変換についてごく簡単に紹介し, 最後に一般化されたリウヴィルの定理を述べ, 証明を行う.

2　偏微分方程式論から見たリウヴィルの定理

複素関数論は様々な数学と関係するため一般化の方向は一つではないが, 正則関数をラプラス方程式の解とみなすのは自然で実りあるものであろう.

$z = x + iy$ とおいたとき, 正則関数 $f(z)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ は, コーシー・リーマンの関係式を満たす. すなわち, 以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

これは, 複素関数が正則（微分可能）であることから容易に分かる. 実軸方向と虚軸方向の導関数が一致するということを書き直しただけの式である. コーシー・リーマンの関係式から, u, v が共に, ラプラス方程式

$$\triangle\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 0$$

を満たすことがわかる. 実際, コーシー・リーマンの関係式をそれぞれ x, y で偏微分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. また, 偏微分の可換性から右辺の合計が 0 になるので, 結局, $\triangle u = 0$ となる. v についても同様にラプラス方程式を満たすことが導かれる. よって, リウヴィルの定理は, 次のように言い換えられると考えられる.

定理 3.（偏微分方程式論から見たリウヴィルの定理）ラプラス方程式 $\triangle\phi = 0$ の解 ϕ が $\mathbb{R}^2$（xy 平面）において有界であれば, それは定数に限る.

この観点から, ラプラス方程式を一般化したとき, リウヴィルの定理と同様の主張が成り立つのはどのような場合かを追求してみよう.

3　超関数とそのフーリエ変換

本章で超関数とそのフーリエ変換の要点を説明し, 次章でリウヴィルの定理の一般化を述べる. 超関数とそのフーリエ変換について興味ある読者は, 例えば, 溝畑 1) 等を参照されたい.

3.1　超関数の定義と例

超関数（Schwartz distribution）とは, 関数という名前がついているが, 一般に関数ではなく, 線形汎関数（関数の関数）の一種である. 直観的なイメージは, 適当な関数 $f(x)$ との内積（あるいは定積分）

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$$

である.　ここで, $\mathbb{R}^d$ は, d 次元のユークリッド空間である.　集合としては, d 個の実数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ 全体である.　また, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$, $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_d$ とまとめて書いた. 関数 φ を与えるとスカラー（実数か複素数）が得られるので,「関数の関数」すなわち汎関数である. これだけなら単なる積分で有り難みはないが,「便利ではあるが, 通常の定義では関数にならない奇妙な関数もどき」も汎関数として捉えることができ, 関数の概念を拡張することができる. そのような「奇妙な関数もどき」の代表例が, ディラックのデルタ関数である. 物理の教科書を開くと, ディラックのデルタ関数とは, 原点でのみ無限大となり, 積分すると 1 になる関数と書かれている. こんな変な関数は存在しないが, 汎関数として, 原点での値を返す汎関数

$$\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

と定義すれば, これこそ所望のデルタ関数になっている.

超関数とはデルタ関数を含む線型汎関数の一種で, もう少し詳しく言うと, 次のように定式化できる. まず, 入力にあたる関数（試験関数）の全体を次のように定義する. $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で, 台（値が 0 でない x 全体の閉包 (縁をつけた

集合)）がコンパクト集合となるもの全体を $\mathcal{D}$ と書く．$\mathcal{D}$ は具体的にどのような関数の集まりなのかを例示するのは意外に難しい．よく知られている $\mathcal{D}$ に属する関数 ($d=1$ の場合) の例は次の関数である．

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$h(x)$ は, $|x| \leq 1$ を台とする無限回微分可能な関数になっている．解析学では, 関数の集まりに,「位相 (topology)」を定めて考える．「位相を定める」とは, ようするにどのような意味で収束するかを定めるということである．$\mathcal{D}$ の場合は, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ が, $\varphi \in \mathcal{D}$ に収束するとは, 任意のコンパクト集合 K（有界な閉集合（縁のある集合））に対し, $\varphi_n - \varphi$ の全ての偏導関数が, K 上で 0 に一様収束することを言う．これで $\mathcal{D}$ の位相が定まったわけである．このような極めて制約の強い関数全体 $\mathcal{D}$ の双対空間 $\mathcal{D}'$ を考えれば, $\mathcal{D}$ が狭い分だけ双対 $\mathcal{D}'$ が大きくなることが期待されるであろう．ここで考えている「双対」とは, $\mathcal{D}$ 上の線形の汎関数で, 次の意味で連続であるものである．すなわち, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ が, $\varphi \in \mathcal{D}$ に収束するならば,

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad (n \to \infty)$$

となるとき, 汎関数 T は連続であるという．超関数 T の微分 $\partial^{\alpha} T$ は, 部分積分を模して次のように定義される．

$$\langle \partial^{\alpha} T, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^{\alpha} \varphi \rangle$$

ここで, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ はマルチインデックスと呼ばれ, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$, $\partial^{\alpha} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ である．便利な記号で, 解析学で多用される．試験関数は無限回微分可能であるから, 定義により, 超関数 T はいつでも無限回微分可能である．例えば, 工学にしばしば登場するヘビサイド関数 $Y(x) = 1 (x \geq 0), = 0 (x < 0)$ は, 原点で連続ではないので当然微分不可能な関数だが, 超関数の意味で微分することは可能で, $Y'(x) = \delta(x)$ となる．一般に区分的に連続な関数を超関数の意味で微分すると, 不連続点でデルタ関数が現れる．このように超関数は微分が自由にできて便利であるが, 一般に掛け算はできない．例えば, デルタ関数の 2 乗はできない．

3.2 超関数の台と台が原点のみの超関数の構造定理

超関数 T の台 $\mathrm{supp}\, T$ を定義しよう．超関数 T が, 開集合 U 上で 0 であるとは, 台が U に含まれる任意の試験関数 $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, $\langle T, \varphi \rangle = 0$ となることと定義する．超関数 T が 0 となるような集合の補集合として T の台 $\mathrm{supp}\, T$ を定義する（厳密には 1 の分解を使う必要があるが省略する）．例えば, デルタ関数については, $\mathrm{supp}\, \delta = \{0\}$ となる．超関数はいくらでも微分できるので, デルタ関数もいくらでも微分できるが, $\mathrm{supp}\, \partial^{\alpha} \delta = \{0\}$ となることも容易にわかる．実は, 台が $\{0\}$ となる超関数の形は完全に分かる．証明は難しくはないが若干の準備がいるので省略する．

定理 4.（構造定理）$\mathrm{supp}\, T = \{0\}$ となる超関数は, デルタ関数の導関数の有限一次結合である．すなわち, 次の形に書ける．

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \partial^{\alpha} \delta$$

3.3 超関数のフーリエ変換と緩増加超関数

超関数のフーリエ変換を定義するには, 形式的には, $\mathcal{D}$ の元のフーリエ変換の像と定義すればよさそうであるが, フーリエ像が大きくなりすぎてあまり得策ではない．そこで, $\mathcal{D}$ の代わりに, 一般に全体に広がってはいるが, 減少オーダーが非常に高い関数として急減少関数の空間（シュワルツ空間）$\mathcal{S}$ を考える．$\varphi \in \mathcal{S}$ であるとは, 任意の整数 $N \geq 0$ に対し,

$$p_N(\varphi) = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi(x)| < \infty$$

となることを言う．任意の導関数がいかなる多項式よりも速く減少する関数であるから急減少関数と呼ばれる．典型的な急減少関数の例は, $G(x) = e^{-x^2}$ である．G の導関数は,「x の多項式 $\times e^{-x^2}$」となるので, 上記の条件が満たされていることが分かる．$\mathcal{S}$ の元をフーリエ変換したものが再び $\mathcal{S}$ の元になるので, $\mathcal{S}$ の上では, フーリエ変換, 逆フーリエ変換を自由に行うことができる．$\mathcal{S}$ の位相は, 可算個のセミノルム $p_N(\varphi) (N = 0, 1, 2, \cdots)$ で定める．つまり, φ_n が φ に $\mathcal{S}$ で収束することを全ての 0 以上の整数 N について, $p_N(\varphi_k - \varphi) \to 0 (k \to \infty)$ と定める．$\mathcal{S}$ 上の連続な線形汎関数全体を $\mathcal{S}'$ と書き, この元を緩増加超関数という．通常の関数の意味でのフーリエ変換について, $f, g \in \mathcal{S}$ なら, 明

らかに,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi$$

が成り立つので, この関係式を超関数に翻訳する. すなわち, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

となるような緩増加超関数 $\hat{T}$ を T のフーリエ変換とすればよい. デルタ関数ばかりで恐縮だが, デルタ関数のフーリエ変換を求めておこう.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot \varphi(x)dx$$

であるから, $\hat{\delta} = 1$ である. デルタ関数の微分のフーリエ変換も容易に計算することができる. 実際,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\partial^\alpha \delta}, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \widehat{\partial^\alpha \varphi} \rangle \\ &= \langle \delta, i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi} \rangle \\ &= (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(0) \end{aligned}$$

となることが分かる. つまり, $\widehat{\partial^\alpha \delta} = (i\xi)^\alpha$ であり, デルタ関数の微分のフーリエ変換は, $(i\xi)^\alpha$ を掛ける操作に等しい. 同様にデルタ関数の微分の逆フーリエ変換も多項式を掛ける操作に変換される.

4　リウヴィルの定理の一般化

いよいよリウヴィルの定理を一般化する. なお, この定理の証明は, 金子 2) に従った.

定理 5. (一般化されたリウヴィルの定理) 定数係数の多項式 $P(\xi)$ の実零点は原点だけとする. このとき, 微分方程式 $P(D)u = 0$ の全空間で定義された解で多項式増大度を持つものは多項式に限る. 特に, 有界であれば, それは定数である.

ここで, $P(\xi)$ は, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d$ の多項式で, 微分作用素(演算子)$P(D)$ は, $P(\xi)$ における $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d$ をそれぞれ, $D_{x_1} = -i\partial_{x_1}, D_{x_2} = -i\partial_{x_2}, \cdots, D_{x_d} = -i\partial_{x_d}$ に置き換えたものである. $\widehat{\partial^\alpha \delta} = (i\xi)^\alpha$ より, $\widehat{(-i\partial)^\alpha \delta} = \xi^\alpha$ となるので, 微分作用素 $P(D)$ はフーリエ変換で多項式 $P(\xi)$ を掛ける操作に変換される. $P(\xi)$ は, $P(D)$ の表象(シンボル)と呼ばれる.

$P(\xi)$ の実零点が原点だけという条件は, もちろんラプラシアンの場合は満たされている. 実際, d 次元のラプラシアンの表象は,

$$P(\xi) = -|\xi|^2 = -\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots \xi_d^2\right)$$

と表現できるから, 実の零点は原点のみである. この他, 拡散方程式に登場する作用素 $\dfrac{\partial}{\partial t} - \triangle$ の表象は $P(\xi) = -i\xi_t + |\xi|^2 = -i\xi_t + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots \xi_d^2\right)$ となり, やはり実の零点は原点だけしかないので, 上記の定理の条件を満たしている.

一般化されたリウヴィルの定理の証明: この条件を満たす解 u は $\mathcal{S}'$ の元とみなすことができる. $P(D)u = 0$ の両辺を超関数の意味でフーリエ変換すれば, $P(\xi)\hat{u}(\xi) = 0$ となる. $\hat{u}$ もまた $\mathcal{S}'$ の元となる. $P(\xi) = 0$ となるような ξ に対しては, $\hat{u}(\xi) = 0$ である. $P(\xi)$ の実零点は原点だけであるから $\operatorname{supp} \hat{u} = \{0\}$ とならねばならない. よって, $\hat{u}$ は, 原点を台に持つ超関数である. 構造定理より,

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha \delta$$

となる. このフーリエ逆変換は多項式となり定理が証明された. □

5　おわりに

本解説では, 複素関数論のリウヴィルの定理を線形偏微分方程式の立場で一般化した. 定理の本質は, それが正則な複素関数であるということではなく, その実部と虚部がラプラス方程式の解であり, その表象の実零点が原点だけであるということであった. 複素関数論の背後には偏微分方程式があったのである. 本解説に登場した超関数とそのフーリエ変換は, デルタ関数を除いて工学部ではあまり触れられない内容かと思われる. これは, デルタ関数とその微分だけ導入しておけば応用上は十分だと考えられているからであろう. しかし, 定理 5 の証明を見れば分かるように, 最初から u をデルタ関数の微分の一次結合とすることはできない. 一般的に超関数(緩増加超関数)を用意しておかなければならないのである.

なお, 超関数の理論は, 物理学者ディラックや工学者ヘビサイドが, 便利な数学的約束として使っていた「関数もどき」を数学的に厳密に基礎づけるものであり, 理論を構築したフランスの数学者ローラン・シュワルツは, この業績により 1950 年のフィールズ賞を授賞している.

参考文献

1) 溝畑茂「偏微分方程式論」岩波書店 (1965)
2) 金子晃「偏微分方程式入門」東京大学出版会 (1998)