

「円周率は3」と有効数字

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2014-09-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 熊谷, 正朗 メールアドレス: 所属:
URL	https://tohoku-gakuin.repo.nii.ac.jp/records/206

「円周率は 3」と有効数字

何年か前、「円周率は 3」というキーワードで議論が起きたことがありました。円周率は円の直径と円周の長さの比で、円や回転が関わるところには必ず出てくる数値です。「 π 」という文字で表され、よく知られる具体的な数値は 3.14。ちょっと本気だと、3.14159265358979 を使ったりしますが、正確な値は求まっていません。正しくは、求められません。数学では無理数と呼ばれる数値に属し、どこまでも数字が続くとされています。それゆえ、コンピュータの性能評価などで「何桁まで計算できたか」が時々話題になりますし、「何桁まで暗唱できるか」という挑戦もあります。同じようなどこまでも続く数には $\sqrt{2}$ などもあります。

さて、どこまでも続く数字なので、「どこまでを計算に使うか」という問題があります。何となく 3.14 を使うことが多いと思いますが、3.14 を使う根拠はなんなのでしょう。「円周率は 3」問題は小学校で円周率が登場するときに「約 3」でよい、という指針がだされ、「ゆとり教育」の例とされて議論を呼びましたが、3 ではだめなのでしょうか？

その答えの一つが有効数字、有効桁数という考え方です。例をあげて計算してみます。

$$\cdot 1.2342 \times 5.4321 = 6.70429782$$

これを正しい計算結果とします。ここから桁数を減らして計算すると、

$$\cdot 1.234 \times 5.432 = \underline{6.703088}$$

$$\cdot 1.23 \times 5.43 = \underline{6.6789}$$

$$\cdot 1.2 \times 5.4 = \underline{6.48}$$

$$\cdot 1 \times 5 = \underline{5}$$

$$\cdot 1.2345 \times 5.4 = \underline{6.66468}$$

結果の下線は「なんとなくずれが目立ち始める桁」まで引いてみました。さまざまな数値で、四捨五入などしながら桁数を削って計算して比較してみると、「上位から、桁数の少ない方の桁数くらいまで、まあまあの結果が出る」ということが見えます。なお、「123.45」は「5 桁分の数字がある」と解釈します。

このように、桁数の少ない、表現の細かくない数値で計算すると、電卓では表示の桁数がたくさん出てきたとしても、使える数字の桁数は、入力した数字の桁数分くらいしかない、という結果になります。この考え方が有効数字で、かけ算とわり算では、2 つの数値の桁数の少ない方になります。足し算と引き算では単純にはいえません。たとえば、 $12 + 0.0012345 = 12.0012345$ になりますが、12 のほうに正確さがいないために、この結果は約 12 としか言えません。一方で、 $123 + 1 = 124$ は、加えた 1 には有効桁数が 1 しかありませんが、結果は 124 と 3 桁は意味があると言えます。顕著な例では、 12345 (小数点以下は精度がない) - 12344 (同) = 1 (同) となり、元の数字はどち

熊谷正朗—KUMAGAI MASAOKI—

東北学院大学 工学部 機械知能工学科 教授

東北学院大学工学部 教授／仙台市地域連携フェロー(ロボットメカトロ系担当)。2000年東北大学大学院工学研究科修了、博士(工学)。同大助手を経て、03年より東北学院大学講師、助教授、准教授、13年より教授。ロボメカ系開発を専門とし、メカの設計からマイコンやサーバのソフト開発までを行う。「基礎からのメカトロニクス講座」や地域企業訪問も実施中。



らも5桁の精度があったのに、引き算の結果1桁だけになってしまいました。そのほか、三角関数や対数、 $\sqrt{\quad}$ なども桁数の考え方がむしろかしくなる例です。

さて、では、「3.14」と「3」の違いは？ですが、これは使い次第です。もし、問題が「直径5.00cmの円の円周の長さは？」だったとすると、3.14を使うべきですが、「直径5cmの」と「3」で原理的には問題ありません(もちろん、小学校ではそこまでの厳密さは求めておらず、「5cm」の正確さは考慮していませんが)。そこまで考えると、実用的にも「円周率は3」はあながち間違いでもなく、「だいたい3倍くらいある」とっておけばよいのではないのでしょうか？もちろん、我々の世界では「50.00mm」という設計をするので、「3.1416」くらい使っておいたほうがいいでしょう。一方で、円周率は3、 $10 \div$ 円周率も3、 $\sqrt{10}$ も3、そういうおおざっぱな計算も役立つ機会はあります。

冒頭の3.1415...79は15桁あります。この15桁という有効数字はソフトウェアの世界で重要な目安です。コンピュータの中では、数値を0/1のセットで表します。整数を16個の0/1(16bit)で表す場合は5桁、32bitでは10桁程度の数値を表せます。小数を扱う場合は一般に「浮動小数点」と呼ばれる形式を使い、32bitで表す単精度(C言語ではfloat型)

では有効数字が7桁、64bitの倍精度(double型)では15桁程度です(整数よりも桁数が少ないのは、表現する際に「 $\times 2$ の〇〇乗」とするので、〇〇の分だけ減るため)。つまり、単純にコンピュータで小数演算をする場合は、15桁以上はムダになるということです。それよりも精度を上げるには、特殊な演算方法を用意する必要があり、メモリを必要としたり速度が大幅に落ちたりするため、そこまでのソフトは少ないと思います。そのため、大きな数に小さな数を足したり、似たような数値の差を取ると、上のような数字の精度がおかしくなるという問題に直面する可能性があるわけで、じつは人ごとではありません。

手で計算しているうちは有効数字などを深く考えずとも、手抜きのためにムダに多くの桁を使わないと思います。電卓を使うようになると、とりあえず表示されただけ全部の数字を信じて使いたくなるようですが、その数字には本当に意味はありますか？と考えてみることは大切です。学生さんにも、折を見て(桁数をたくさん書いていたときにツッコミをいれて)、数字を扱う心構えを伝えています。でもやっぱり、「円周率は3」は物足りないですね。

■キーワード：

有効数字、有効桁数、円周率、桁落ち