公園の遊具と非線形

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-11-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 熊谷, 正朗 メールアドレス: 所属:
URL	https://tohoku-gakuin.repo.nii.ac.jp/records/623

公園の遊具と非線形

ある日、娘をつれて近所の公園に行きました。その公園には、「振動」を使う遊具が二つ。一つはブランコ。もう一つは地面に固定された、かなりごついコイルバネの上に座る部分が付いている遊具で、上下方向というよりは前後左右に曲げる方向の振動を楽しむようなものです。どちらの遊具も乗っている人間が積極的に揺らしてしまうので、必ずしも特定の周期では動きませんが、話を簡単にするために、漕ぐことはやめ、自然に揺れる状態を考えましょう。

振り子も、バネ＋質量も、いずれも振動運動をする代表例として、高校くらいの物理の教科書に載っています。振り子については、その周期が振り子の長さの平方根に比例します（計算式は$2 \times 3.14 \times \sqrt{\text{長さ} \div \text{重力加速度}}$）。バネについては、上記のような遊具は複雑ですが、単純なバネに質量を付けて引っ張って離したような振動であれば、周期は、質量の平方根に比例し、バネ定数（バネの強さ）の平方根に反比例します（$2 \times 3.14 \times \sqrt{\text{質量} \div \text{バネ定数}}$）。

ただし、これらはいずれも、揺れの幅が小さいとき、という制限が付いています。より具体的には、「戻ろうとする力が、位置・角度の変化に比例するならば」という条件です。たとえば、バネについては、バネの引張り･圧縮の力は、［ばね定数×自然な長さからの伸縮（ねじりバネの場合はねじれ角）］で表され、そこから計算すると、上記の周期で正弦波振動することが示せます。しかし、バネは伸縮が大きくなると比例からずれてきます。塑性変形して伸びてしまうことは論外としても、バネが完全に圧縮してすき間がなくなればそれ以上は縮まず、比例関係が崩れます。

一方の振り子のほうは、より明確にずれが生じます。振り子を真下の位置に戻そうとする力は、［振り子に作用する重力× sin(傾き角)］です。この sin（角度）は角度が小さいときは、ほぼ角度（ラジアン単位）と同じ値になります。そのため、振り子の計算では、戻す力を［重力×角度］で代用します。しかし、これは先ほどのバネ同様、変化に比例した力となり、先に示した周期での正弦波振動をします。しかし、角度が大きくなると代用できずにずれてきます。

さて、世の中のさまざまなものの性質を表す区分に「線形」「非線形」という見方があります。何か対象に、ａという入力を与えたときの結果と、ｂという入力を与えたときの結果、さらにａ＋ｂの合計を与えた場合に対して、

［ａ＋ｂの結果］＝［ａの結果］＋［ｂの結果］

という関係が成り立つ場合「線形である」といい、それ以外を非線形といいます。比例するものは線形ですが、三角関数 sin は非線形です。身の回りの現象は、線形なものが多いようで、非

熊谷正朗 *—KUMAGAI MASAAKI—*
東北学院大学 工学部 機械知能工学科 教授

東北学院大学工学部　教授／仙台市地域連携フェロー(ロボットメカトロ系担当)。2000 年東北大学大学院工学研究科修了、博士(工学)、同大助手。03 年東北学院大学講師、助教授、准教授を経て、現在に至る。ロボメカ系開発を専門とし、メカの設計からマイコンやサーバのソフト開発までを行う。「基礎からのメカトロニクス講座」や地域企業訪問も実施中。



線形なもののほうがずっと多く存在します。先にあげた三角関数は曲がる軸が一ヵ所あれば発生します。自動車のアクセルペダルとエンジンの回転､ブレーキ操作なども非線形です（対して、ハンドルはそこそこ線形です)。摩擦もまた非線形を引き起こします。工場の腕型ロボットは（そもそも人間の体も）非線形の塊です。対して、前述の振動の周期は線形の範囲での計算値です。

その一方で、基本的な制御理論は線形なものを制御することを前提にしているため、非線形なものを制御しようとすると注意が必要です。その場合、非線形専用の制御理論があるというよりは、非線形なものを線形な理論で動かす工夫をするほうが一般的です。

まず、非線形な対象をそのまま線形な理論で動かしてしまう場合です。非線形とはいえ、単調性(操作を増やすと出力が常に増える・常に減る傾向）があって、かつ比較的比例に近い特性を持つなら、使う制御則の許容範囲でカバーできる場合が多くあります。たとえば､自動車のアクセル･ブレーキのようなものはこの部類です。二つ目の手は、非線形なものの一部を、線形な特性で近似する場合です。前述の振り子の「sin は角度が小さいときは角度とほぼ同じ値」はこのような近似の一種です。極端に傾向が変わるような非線形特性でなければ、この線形化近似で済みますし、全体を複数の区間に区切って、複数の線形化を使う場合もあります。

それに対して、非線形分をキャンセルするような手法もあります。たとえば腕型のロボットは各部にかかる重力がその制御に大きく影響します。肘を曲げた場合／伸ばした場合、腕を上に上げた場合／水平にした場合などで肩にかかる力はかなり変わります。しかし、これらは関節角度がわかれば、あらかじめ計算することができます。そこで、この重力による分を計算して関節の出力に加えると、関節の角度制御則は重力の非線形さの影響を受けなくなります。制御したい対象の特性がわかっている場合には強力な手法です。

さて、我々はどのようにして、さまざまなものを使いこなしているのでしょうか。ブランコの非線形性を理解して乗っているでしょうか。人の動作は、初めて取り組むものは試行錯誤や、フィードバック制御などで動かして学習し、「こんな感じの時はこう操作」という動作が身についていきます。その結果、非線形への対応ができるようになる、と言えるでしょう。そもそも、冒頭のバネ遊具も振幅を大きくするには加震周期を変える必要があると体が先に気づき、バネに非線形性があるな、と思ったのが今回の話の発端なのです。