

Navier-Stokes 方程式の解を求める方法について

高 橋 光 一

概要 Navier-Stokes (NS) 方程式によって記述される 2 次元流体の速度場を、任意の保存流の存在を仮定して決定する方法が著者によって提案された (Takahashi 2013)。さらに、この方法から示唆される解のかたちに基づいて、軸対称回転流の新しい解を求めることもできている。厳密解を求めるこの方法では、関数形が知られている保存流、および対応する保存‘電荷’をもとに流体の渦度を決定する‘変異方程式’を利用する。本稿では、まず変異方程式の導出とその性質に関する詳細な解説をおこなう。次に、NS 方程式の厳密解が容易に求まる例の中で、教科書で取り上げられる標準的な解、および気象学的に重要と思われるもの、すなわち台風や熱帯性低気圧の主要な気象学的特性を再現する新しい解について、その導出と解の特質の分析をおこなう。後者については、粘性 0 の流体を記述するとされる Euler 方程式からは導くことができない無粘性流をつくることのできることは特に注目すべき点である。最終的に、台風の中高度における基本構造が、大気熱力学的挙動ではなく流体力学的挙動に基づいて理解できる可能性が示唆される。

Key words : Navier-Stokes 方程式 ; 変異方程式 ; 厳密解 ; 台風 ; 無粘性流

1. はじめに

液体と気体のように、自在に変形することができる物質を総称して流体という。普通の流体は、接触している面を通して運動に対する抵抗を受ける。この抵抗が粘性力である。運動する流体の変形の程度が粘性力に比例するものを Newton 流体と呼ぶ。われわれの身の回りには、Newton 流体と見なしてよい多くの気体と液体がある。それらは、それら自身の運動や他の運動体との接触を通して、ミクロからマクロ、ないし宇宙的な尺度にわたってさまざまな興味深い現象を引き起こす。

Newton 流体の運動は Navier-Stokes (NS) 方程式 (Navier 1827, Stokes 1845) によって記述される。近年のコンピュータの発展とも相まって、われわれに馴染みのある空気や水のある種の流れを、NS 方程式によって精度良く再現できることが知られてきている。また、NS 方程式には、現実世界との対応のみならず、純粋数学的にも豊富で深い内容が含まれていることが知られている (たとえば、岡本 2010, 藤田 2010, 大木 2010, 山田 2010, 鵜飼 2010, 小菌 2010 による解説がある)。

NS 方程式は、変形する流体の各部分に作用する力が、それらの部分の加速度を生じるという Newton 力学の考え方に基づいて導くことができる。力としては、粘性応力、圧力差、

重力などの外力, 磁場と電荷による Lorentz 力などがある。具体的には次のように書かれる:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \quad (1.1)$$

$\mathbf{v}, \rho, P, \mathbf{f}$ は流体の速度ベクトル, 質量密度, 圧力, および外力ベクトルで, すべて空間と時間の関数である。左辺第 1 項は通常的时间偏微分, 第 2 項は速度勾配による加速度への移流効果分である。(1.1) は, 左辺の加速度が右辺の力によって生じることを表している。本論文では, \mathbf{r} を空間座標, U をポテンシャルとして, 話を保存力 $\mathbf{f} = -\nabla U(\mathbf{r})$ の場合に限る。 ν は動粘性係数である。上式の左辺が流体要素の加速度, 右辺がそれに作用する力である。

右辺第 1 項と第 2 項は, 変形への粘性力からの影響を表す。第 1 項は速度場の発散によるので密度が変化することができる圧縮性の流れで重要になる。この項を落とし, 非圧縮性の流れを記述するようにしたものを NS 方程式と呼ぶことも多い。右辺の粘性項をすべて落としたものがいわゆる Euler 方程式である。

NS 方程式は, 通常, 質量の保存を保証する連続の式, および状態方程式, その他の補助的な式と連立させて解かれる。連続の式は (これ以後, 時間 t に関する偏微分を変数の上の点で表すことにする)

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2)$$

また, 圧力を決める状態方程式としては

$$P = P_f + \kappa \rho^{\gamma} \quad (1.3)$$

を用いることが考えられる。右辺第 1 項は外力によるもので, 空間座標に直接依存する。非圧縮性流体で考慮すべき部分である。第 2 項は密度 ρ を通して座標に依存するもので, 圧縮性流体の場合に重要となる。(圧力 P は一般には温度にも依存するが, それは定数 κ に押し込めて, ここではその依存性は明示していない。)

われわれは, 議論の対象に圧縮性流体も含めることにする。実際, 地球を含む惑星の大気や恒星気体の大規模運動では, 気体の圧縮性を無視することはできない。ただし, 粘性流体の運動に広く見られる超臨界多スケール現象を厳密解で表現することはきわめて難しい。自由度を制限した単純な方程式系の Lorenz モデル (Lorenz 1963) でさえ, カオスについては数値解が知られているだけである。したがって, とりわけ圧縮性流体に対する厳密解は, ある種の平均的大局運動を表すか, あるいは不安定解である可能性を忘れてはいけない。(これらに関する簡明な案内書としては Bhattacharjee (1987) がある。)

既に述べたように, 非圧縮性流体の場合

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

を課し、(1.1) 右辺の第 1 項を落とすのが習慣となっている。すなわち、 \mathbf{v} を回転的 (solenoidal) ベクトルに制限するのである。ただし、これは非圧縮性の必要条件であって、十分条件ではない。実際、連続の式はこの場合

$$\dot{\rho} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

となり、 $\dot{\rho} = \nabla \rho = 0$ を必ずしも意味しない。われわれは $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を '弱い非圧縮性の条件' と呼ぶことにする。

これらの式の組を適当な境界条件のもとで解いて、さまざまな物理的厳密解が得られている (レビューとしては Wang (1991) がある。その他、多くの研究の解説については Drazin and Riley (2006) を参照のこと)。ただし、何をもって厳密解と呼ぶかについては、異なった立場がありうる。

一つの定義では、(1.1) と (1.4) をすべての \mathbf{r} と t および ν と ρ で満たす関数表現、とする (Wang 1989)。このときは、解の解析的性質まで含めて理解できる可能性があるので、数学的には満足できる状況といえる。同時に Wang は、これらの方程式系の直接的数値計算結果は、モデルパラメータごとに計算をし直さなければならないので、厳密解とは呼ばない。

現実には、厳密解という語をもっと緩い意味で使うのが一般である (Drazin and Riley 2006)。すなわち、よく知られた関数の有限または無限の和で表されるもの、常微分方程式で表されるもの、より簡単な偏微分方程式で表されるものは実用上はすべて厳密解と呼んでよい。これらが与えられれば、現在の計算技術によっていくらでも精度のよい数値解を任意のモデルパラメータに対して求めることができるからである。ただし、彼らの立場では、漸近的振る舞いだけを表す関数形による解は、近似解であって厳密解と区別されるべきものである。

解が、解析的な性質がよく知られている関数で表されるのが理想である。しかし、条件や方程式の単純化を行っても、偏微分方程式の非線形性のために厳密解の探索は一般には非常に難しいし、カオスの存在を考えれば不可能なことの方が多いに違いない。連続の式 (1.2) を、NS 方程式とは独立に満たさなければいけないことも、話を面倒にする原因となる。

本論文では、Drazin and Riley (2006) に近い立場をとる。 ('近い' の意味は第 3 節で明らかになる。) そして、対象を z 方向に一様な回転的 2 次元流体に絞り、方程式を単純化した上で解析解や上記の意味での数値解を探す方法について述べる。われわれが着目するのは、2 次元流体の渦度の方程式は、任意の保存量についての連続の式とよく似ているという事実である。

2. 回転の流れにおける NS 方程式と連続方程式の対応

2.1 渦度の方程式

回転の流れでは、ある 3 次元ベクトル場 A を用いて、速度場が

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1.1)$$

で与えられる。ここでは 2 次元流体を考えるので、簡単のため A として

$$\mathbf{A} = (0, 0, A_z(x, y)) \quad \text{または} \quad \mathbf{A} = (0, 0, A_z(r, \theta)) \quad (2.1.2)$$

というかたちを仮定する。最初が Cartesian 座標系, 2 番目が円筒座標系での表記である。すなわち

$$v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2.1.3a)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}, v_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (2.1.3b)$$

および $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ である。このとき $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ であることに注意せよ。このような A_z は流れ関数と呼ばれる。(2.1.2), (2.1.3) は、流れが xy 面内で生じていることを示している。

もとのベクトル方程式の両辺の回転 (curl) をとると、保存力の場合 x, y, z 成分はそれぞれ

$$\nabla \times (\rho^{-1} \nabla P)|_x = \nabla \times (\rho^{-1} \nabla P)|_y = 0 \quad (2.1.4a)$$

$$\zeta + \nabla(\zeta \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nu \nabla \zeta) - \nabla \times (\rho^{-1} \nabla P)|_z \quad (2.1.4b)$$

となる。ここで ζ は $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = (0, 0, \zeta)$ (渦度と呼ばれる) の z 成分

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v}|_z = -\nabla^2 A_z \quad (2.1.5)$$

である。(2.1.4a) は、ベクトル $\nabla \rho$ と ∇P は共に xy 面内にあることを意味する。

圧力項は密度の勾配が 0 でない場合のみ効果を残すので、(1.3) の圧縮項のみが寄与することを考慮すると

$$-\rho^{-2} \nabla \rho \times \nabla P \sim \rho^{\gamma-2} \nabla \kappa \times \nabla \rho \quad (2.1.6)$$

と書けるであろう。(2.1.4b) と (2.1.6) で、 ν と κ は密度と温度を通して座標依存性を持ちうるので、それらの空間微分は一般に 0 でないことを考慮しているのである。しかし、本論文ではこれらは座標依存性のない定数と見なし、(2.1.4b) 右辺の圧力勾配項は落とすことにする。

$\boldsymbol{\omega}$ と \boldsymbol{v} が非ゼロで $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = 0$ なる流れを Beltrami 流という。これに対し、文献でしばしば取り上げられる一般化された Beltrami 流は

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = 0$$

を満たすものをいう。われわれが取り扱う問題では、流れは 2 次元で渦度は z 成分のみを有するので、これは

$$\nabla(\boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} = 0$$

に帰着する。流れがどの勾配方向と直交する方向に向いているということで、特殊な外力が作用するときに実現する。われわれは、その具体例を次節以降で見ることになるであろう。

上記の NS 方程式 (2.1.4) と連続の式 (1.2) を連立させて解を求めるのであるが、その一般的な処方箋は確立していない。はっきりした対称性のない非線形の偏微分方程式であることがその要因である。しかし、Navier (1827), Poisson (1831), Saint-Venant (1843), Stokes (1845) によって方程式が見いだされ研究されて以来 200 年にわたる努力により、特殊な境界条件の下での厳密解、および数値解を求めやすい常微分方程式のかたちは見つかっている。とくに、回転的な平面内定常流としては、Kampe de Fériet (1930, 1932), Tsien (1943) らによりさまざまな厳密解が見いだされている。それらについては Wang (1991) を参照されたい。厳密解を求めるときは、特殊な状況での対称性やスケーリング性を考慮して始めに速度場についてもっともらしい関数形を仮定し、NS 方程式と連続の式をともに満たすように関数を決めるという方法が多くとられる。こうして、ときに、解くべき問題が自由度を 1 にまで減らした常微分方程式の Cauchy 問題に帰着することもある。以下では、保存量についてのよく知られている連続の式をもとに、NS 方程式を解く Takahashi (2013) の方法について説明する。

2.2 保存流の連続の式との対応

ここで、一般的な連続の式

$$\dot{\rho}_c + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_c = 0 \tag{2.2.1}$$

を考える。この式を満たす ρ_c と \boldsymbol{j}_c の組は任意にいくらかでも作るができる*。例えば、任意のベクトル $\boldsymbol{j}_c(t, \boldsymbol{r})$ から $\rho_c(t, \boldsymbol{r}) = \rho_0 - \int_{t_0}^t dt \nabla \cdot \boldsymbol{j}_c(t, \boldsymbol{r})$ によって ρ_c を決めればよい。 t_0 , ρ_0 は定数である。

*物理的に‘良い’振る舞いをする解析的な ρ_c のかたちを利用する方法もある。量子力学を例にとって説明する。(場の理論でもかまわない。) 量子力学における Schrödinger 方程式

は次のような方程式である：

$$i \hbar \dot{\psi} = (-\hbar^2 a \nabla^2 + U(\mathbf{r}))\psi \quad (2\cdot2\cdot2)$$

a は定数（粒子の質量を m として $1/2m$ で与えられる。これ以降、自然単位系 $\hbar = 1$ を用いる）、 U は実数のスカラー関数（ポテンシャルエネルギー）で、解 ψ は複素数（規格化可能な場合、とくに波動関数と呼ばれる）である。量子力学の基礎については例えば Schiff (1968) を参考にされたい。

ここで密度関数

$$\rho_c = \psi^* \psi \quad (2\cdot2\cdot3)$$

を定義する。（量子力学では、ある時刻にある場所に粒子が存在する‘確率密度’を表す。）この ψ から構成される‘流れ’

$$\mathbf{j}_c = ia((\nabla\psi^*)\psi - \psi^*\nabla\psi) = 2a\rho_c\nabla\delta \quad (2\cdot2\cdot4)$$

(δ は ψ の位相) は連続の式 (2·2·1) を自動的に満たすことは (2·2·2) を用いて容易に確かめることができる。これは、U(1) 対称性の帰結であり、‘存在確率の保存’を表すと解釈される¹。Schrödinger 方程式が線形であることもあり、そのような ψ を求める処方箋はすでに確立している。したがって、(2·2·2) をいろいろな条件下で解くことによって、(2·2·1) を満たすさまざまな ρ_c と \mathbf{j}_c を得ることができる。それらは、ポテンシャルと境界条件が滑らかなときは時空についてやはり滑らかな関数である。

ここで、NS 方程式に現れる流体の速度場 \mathbf{v} を使い、連続の式 (2·2·1) を次のように書き換える：

$$\dot{\rho}_c + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v} - \mathbf{j}_c) \quad (2\cdot2\cdot5)$$

そして、この式の左辺と方程式 (2·1·4b) の左辺との類似性 – ζ と ρ_c の対応 – に着目する：(2·2·5) は (2·1·4b) とよく似ている！ここで、過度 ζ が連続の式を満たす ρ_c という関数を通してのみ座標依存性を持つようにできると仮定しよう。すなわち、 t , \mathbf{r} を時間、空間座標として

$$\zeta = \zeta(\rho_c(t, \mathbf{r})) \quad (2\cdot2\cdot6)$$

このとき $\dot{\zeta} = \zeta' \dot{\rho}_c$, $\nabla \zeta = \zeta' \nabla \rho_c$ (ζ', ζ'' 等は ζ の直接の変数 ρ_c に関する微分を表す) である

¹ Schrödinger 方程式は‘作用’ $\int dt d\mathbf{r} \psi^* (i\partial_t + \hbar^2 \nabla^2 / 2m - U(\mathbf{r}))\psi$ が ψ の任意の変分について停留値を取るという要請から導かれる。変分を局所 U(1) 変換 $\psi \rightarrow e^{i\epsilon} \psi$ に限ると、保存則 (2·2·4) が得られる。

から、 ζ の方程式 (2.1.4b) は

$$(\dot{\rho}_c + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v})) \zeta' = \nabla \cdot (\nu \nabla \rho_c) \zeta' + \nu (\nabla \rho_c)^2 \zeta'' - \rho^{r-2} \nabla \kappa \times \nabla \rho|_z \quad (2.2.7)$$

となる。これと連続の式 (2.2.5) から時間微分の項を消去して

$$\nu (\nabla \rho_c)^2 \zeta'' = [\nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v} - \mathbf{j}_c) - \nabla \cdot (\nu \nabla \rho_c)] \zeta' + \rho^{r-2} \nabla \kappa \times \nabla \rho|_z \quad (2.2.8)$$

を得る。当然、これが ζ に関する方程式として意味があるのは $\nabla \rho_c \neq 0$ の領域においてである。

(2.2.8) の右辺に含まれる \mathbf{v} は(2.1.5)によって ζ と直接関係づけられるので、その空間変化もまた ρ_c を通して現れるとするのが自然である。すると、流れ関数の式と弱い非圧縮性の条件

$$\nabla \times \mathbf{v}|_z = \partial_x \rho_c v'_y - \partial_y \rho_c v'_x = \zeta \quad (2.2.9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x \rho_c v'_x + \partial_y \rho_c v'_y = 0 \quad (2.2.9b)$$

(v'_x 等は v_x 等の ρ_c についての微分を表す)と併せて、 ζ, v_x, v_y の3つの未知関数を求めるのに十分な式が揃ったことになる。ただし、実際の流体密度 ρ は、このようにして求められた \mathbf{v} がもとのNS方程式(1.1.1)と連続の式(1.1.2)を満たすように決めなければいけない。後に見るように、これはそれほど難しいことではない。なお、(2.2.6)は単なる数学的な関係であって、今の段階ではそこに物理的な意味を与えることはできない。

2.3 $\nabla \kappa = 0$ の場合

(2.2.8)で、 κ に座標依存性がないときはその右辺の最後の項が0なのでさらに議論を進めることができる。まず $\zeta' \neq 0, \nabla \rho_c \neq 0$ の場合に話を限り

$$\nabla \cdot \mathbf{Y} \equiv \nu \frac{\zeta''}{\zeta'} (\nabla \rho_c)^2 \quad (2.3.1)$$

すなわち、位置ベクトル \mathbf{r} の任意の関数 α と微分可能な関数 φ を使い

$$\begin{aligned} Y_x &= \int^x \alpha \nu \frac{\zeta''}{\zeta'} (\nabla \rho_c)^2 dx + \partial_y \varphi \\ Y_y &= \int^y (1-\alpha) \nu \frac{\zeta''}{\zeta'} (\nabla \rho_c)^2 dy - \partial_x \varphi \\ Y_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

でベクトル \mathbf{Y} を定義する。もちろん、(2.3.2)の積分が意味をもつ領域での定義である。これを用いて(2.2.8)を

$$\nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v} - \mathbf{j}_c) = \nabla \cdot (\nu \nabla \rho_c + \mathbf{Y}) \quad (2\cdot3\cdot3)$$

と書きなおす。これを積分して速度 \mathbf{v} は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho_c} (\mathbf{j}_c + \nu \nabla \rho_c + \mathbf{Y} + \nabla \times \mathbf{X}) \\ &= \frac{\mathbf{j}_c}{\rho_c} + \nu \nabla \ln \rho_c + \frac{\mathbf{Y}}{\rho_c} - \nabla \rho_c^{-1} \times \mathbf{X} + \nabla \times (\rho_c^{-1} \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2\cdot3\cdot4)$$

と表される。 $\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$ はこの段階では任意のベクトルである。他方、 \mathbf{v} が \mathbf{A} の回転で与えられることから、回転部分を対応させた

$$\mathbf{A} = \rho_c^{-1} \mathbf{X} \quad (2\cdot3\cdot5)$$

(右辺に z の 1 次関数の発散項があってもよいが、以下の議論では本質的でないので落としている) に加えて右辺の非回転部分が 0、すなわち

$$\frac{\mathbf{j}_c}{\rho_c} + \nu \nabla \ln \rho_c + \frac{\mathbf{Y}}{\rho_c} - \nabla \rho_c^{-1} \times \mathbf{X} = 0 \quad (2\cdot3\cdot6)$$

であることを意味する。この両辺に ρ_c を掛けて発散をとると

$$\nu (\nabla \rho_c)^2 \zeta'' = (\nu \nabla \rho_c \cdot \nabla \ln \zeta') \zeta' = [-\nabla \cdot (\mathbf{j}_c + \nu \nabla \rho_c) + \nabla X_z \times \nabla \ln \rho_c] \zeta' \quad (2\cdot3\cdot7)$$

これがわれわれが探していたもので (流体力学とは直接関係のない) 任意の保存流 (ρ_c, \mathbf{j}_c) を古典流体の渦度に変異させる、いわば変異方程式である。 X_z が ρ_c のみの関数であるときは、(2·3·7) の右辺かき括弧内の最後の項— X_z 項—は 0 である。それ以外のときは、 ζ が一般には X_z の汎関数として決定されることを意味する。なお、(2·3·7) を複数の独立な流れがある多自由度の場合に形式的に拡張するのは直ちにできて、動粘性係数 ν が定数なら

$$\nu \sum_{l,m} \nabla \rho_{cl} \cdot \nabla \rho_{cm} \partial_l \partial_m \zeta = \sum_l [-\nabla \cdot (\mathbf{j}_{cl} + \nu \nabla \rho_{cl}) + \nabla X_z \times \nabla \rho_{cl}] \partial_l \zeta \quad (2\cdot3\cdot8)$$

となる。ここで、 $\partial_l \zeta \equiv \partial \zeta (\rho_{c1}(t, \mathbf{r}), \rho_{c2}(t, \mathbf{r}), \dots) / \partial \rho_{cl}(t, \mathbf{r})$, $l = 1, 2, \dots$ である。以下では、議論を 1 種類の保存流のみがある 1 自由度の場合に限ることとする。

一般の場合に (2·3·7) を解析的に解くのは極めて難しいし、必ずしも解があるというわけでもない。解がある場合に、これを数値的に解くには次のようにする。一組の ρ_c と \mathbf{j}_c 、および X_z の関数形、さらに、前空間における ζ と ζ' の値—初期条件—を選び、 xy 平面内のある曲線に沿って ρ_c, δ, X_z とそれらの微分値をもとに ζ'' と各項の値を求め、また ρ_c の変化から ζ' と ζ を計算する。

同時に、(2·3·5) と渦度の式 (2·1·5) から得られる ($\bar{X} \equiv \rho_c^{-1} \mathbf{X}$)

$$\nabla^2 \bar{X}_z = -\zeta \quad (2\cdot3\cdot8)$$

を用いて X_z を決めることができる。このとき、 X_z も ρ_c を通してのみ時空依存性が現れるなら

$$(\nabla \rho_c)^2 \bar{X}_z'' + \nabla^2 \rho_c \bar{X}_z' = -\zeta \quad (2\cdot3\cdot9)$$

となる。さらに、(2\cdot3\cdot7) の右辺の最後の項は 0 となる。(2\cdot3\cdot7) と (2\cdot3\cdot9) は ζ と \bar{X}_z の常微分方程式であり、与えられた ρ_c と \mathbf{j}_c (または δ) のもとでこれらを連立させて数値的に解くのは難しいことではない。1 自由度の簡単な例は Takahashi (2013) で示されている。時間依存性のあるなしにかかわらず、採用する ρ_c と \mathbf{j}_c に応じて直ちに解が求まるので、大変便利である。(解の精度は数値計算法の精度のみによる。) そのような数値解の一般的な探索は別の機会に譲り、本論文では、厳密解の導出に注意を向けることにする。

【解の正則性について】

変異方程式 (2\cdot3\cdot7) はどのような解を許すだろうか。微分方程式の解の大域的性質が初期条件に依存することはよく知られている (たとえば Hirsch 他 2004)。空間 3 次元において、NS 方程式が与えられた初期条件の下で正則な解をもつかどうかは、物理学のみならず数学でも関心が持たれている未解決の問題である (小菌 2010)。第 3 節で述べるように、変異方程式が 1 自由度—組の保存流 (ρ_c , \mathbf{j}_c) のみが存在—の場合は、保存流依存性は現れない。自由度が 2 以上で保存流依存性が消去できないときは、2 次元流に対する (2\cdot3\cdot8) から次のことが予想される: ρ_{cl} として、有限の初期値 $\rho_{cl}(t=0)$ を持ち、ある $t \in (0, T]$ で ζ' を有限とし要素が $\nabla \rho_{cl} \cdot \nabla \rho_{cm}$ で与えられる行列 \mathfrak{M} の行列式 $\det \mathfrak{M}$ が 0 となるものをとれば (保存流の式は $\rho_{cl} \rightarrow \rho_{cl} + a_l(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}_{cl} \rightarrow \mathbf{j}_{cl}$, $a_l(\mathbf{r})$ は時間に依存しない任意の関数、のもとで不変であり、かつ ζ' の初期値は任意なので、これはいつでも可能である)、その t において ζ の微分方程式は特異的となり、 ζ は発散するのである。時間の考えている全領域で正則な解を得るためには、一般にその領域で常に $\det \mathfrak{M} \neq 0$ となる ρ_{cl} を用いることが必要である。なお、微分方程式の解の正則性は初期値の取り方に依存するという事も知られている (たとえば Liu and Tadmor 2002)。力学系の言葉を用いれば、吸引体 (attractor) や反発体 (repeller) はそれぞれ固有の吸引域や反発域を持つ、ということになる。

2\cdot4 X_z 項の性質

厳密解の導出をする前に、 X_z 項について考えておく。 X_z 項が 0 でないとして、その大域的な性質を見るために、2 次元平面上の面積分を考えよう:

$$I(X_z) = \int \nabla \bar{X}_z \times \nabla \rho_c |_{z_2} d\sigma$$

ここで $d\sigma$ は面積要素である。大きさ $d\sigma$ で $+z$ 方向を向くベクトルを $d\sigma$ とすると、よく知られたベクトル恒等式

$$\nabla \times (fA) = \nabla f \times A + f \nabla \times A$$

と Stokes の定理により、 $\nabla \times \nabla \bar{X}_z = 0$ が成立する場合

$$I(X_z) = \int \nabla \bar{X}_z \times \nabla \rho_c \cdot d\sigma = \oint \bar{X}_z \nabla \rho_c \cdot dl$$

を得る。右辺は面積分領域の外周に沿った線積分である。 ρ_c が円筒座標系 (r, θ, z) において r だけの関数で、積分の経路が ρ_c の等高線に沿っているとき、 $\nabla \rho_c$ の勾配は常に線要素 dl の向きと直交しているので $I(X_z)$ は X_z の如何にかかわらず 0 である。

他方で、上記の式の変形で \bar{X}_z と ρ_c の役割を交換すると

$$I(X_z) = -\oint \rho_c \nabla \bar{X}_z \cdot dl \tag{2.4.1}$$

となる。 X_z は任意であるから、その勾配を外周に沿った dl と平行な成分を持つように X_z を θ の 1 次関数ととると (2.4.1) の $I(X_z)$ は非ゼロとなり、先の結果と食い違いが生じる。これは θ の特異性によるのであるが、 X_z 項のこのような取り方で、自明でない現象が起きる可能性を示すものである。

もちろん、 X_z は、速度場が NS 方程式と連続の式を満たすように選ばなければならない。それでも、 X_z にある程度の選択の余地があるのである。後で取り上げる具体例から推測されることであるが、これまでによく知られている解は、 X_z 項が 0 に相当するものであるように見える。これに対し、以下で見る新しい解では X_z 項が重要な役割を演じる（次節の例 2 を見よ）。

ただし、 X_z 項が有限のときに、(2.3.7) と (2.3.8) が解を持つかどうかは改めて確かめなければならない。無矛盾な解が無いときは、もとの NS 方程式と連続の式に立ち返って解（それがあるとして）を求め直す必要がある。

実際、これから具体例で示すように、初めに適当な X_z のかたちを推定して ζ を決め、そこから $\nabla^2 A_z = -\zeta$ と $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$ から得られる \mathbf{v} がもとの NS 方程式を満たすように、未知の定数と関数を決める方が容易に解を求めることができる場合がある。

ζ と \mathbf{v} を決める方程式を導いたが、これらには ρ_c のほかに \mathbf{j}_c も明示的に現れる。われわれの仮定は、 ζ と X_z は ρ_c を通してのみ座標依存性を持つというものであった。したがって、(2.3.7) によって ζ を求めるときには一般には $\nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0$ という条件に従う曲線に沿って計算を行わなければならない。

3 (2・3・7) 式の定常解 $-\rho_c$ に依存しない厳密解の決定

時間に依存しない厳密解が求まる例のうち簡単なものは Takahashi (2013) でその求め方が説明されている。 ρ_c として時間に依存しないものを用いる場合は、(2・3・7) は NS 方程式の直接的な焼き直しに過ぎず、NS 方程式に代えてこれを解く利点は特に存在しない。また、1次元で X_z 項が 0 のときは容易に一般解を得ることができる。しかしここでは、時間に依存しない場合を含め四つの例を取り上げて、(2・3・7) の扱い方を具体的に説明することにする。

例 1 (2・2・4) の位相が $\delta = -kx$ (波数 k は定数) で、すべての物理量が x 依存性のみもつ場合

すべての物理量が x 依存性のみもつことから X_z 項は 0 である。(2・3・7) より

$$\ln \zeta' = \frac{2ak}{\nu} x - \ln \partial_x \rho_c \quad (3\cdot1\cdot1)$$

解は、 $c_1, c_2, c_3 = 2ak/\nu$ を定数として

$$\begin{aligned} \zeta &= -c_1 - c_2 e^{c_3 x}, \quad A_z = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{c_3^2} e^{c_3 x} + \nu c_3 y \\ v_x &= \nu c_3, \quad v_y = -c_1 x - \frac{c_2}{c_3} e^{c_3 x} \end{aligned} \quad (3\cdot1\cdot2)$$

これは一般化された Couett-Poiseuille の解である。 c_1, c_2 は、圧力、動粘性係数、密度、流速と関係づけられる (Drazin and Riley 2006)。

ここで、興味深い点の一つ指摘しておこう。この解は $v_x =$ 一定で $c_3 = v_x/\nu$ である。これと上の c_3 の定義とを比べて $2ak = v_x$ であることがわかる。Schrödinger 方程式では、粒子の質量を m として $a = 1/2m$ であるので、上記の関係式は $k = mv_x$ という、自由粒子の波数と運動量の量子力学的関係を表すものにほかならない。

例 2 軸対称で X_z 以外は r 依存性のみある定常流

時間依存性の無いこの流れは Takahashi (2013) により見つけられた。ここでは要点と補足、および気象学との関係について述べる。円筒座標系を用いる。

A 無粘性流

【新しい解】

前節での考察により、 X_z が θ の 1 次関数のときに面白い現象が起きることが予想される。

このとき, (3・2・1) より, 流れ関数 A_z も θ の 1 次関数である。ところで, Poisson 方程式 (2・1・5) により, 流れ関数は渦度を使い

$$A_z = - \int^r \frac{dr'}{r'} \int^r dr' r' \zeta(r') + h(\theta) \ln r \quad (3\cdot2\cdot1)$$

(ただし $h'' = 0$, h 上のダッシュは θ に関する微分) とならねばならない。 $h(\theta) = h_0 + h_1 \theta$ は θ の 1 次関数である。 θ 依存項の r 依存性は一意的に決まることに注意しよう。ここで (2・1・3b) をそのまま適用すると

$$v_r = h_1 \frac{\ln r}{r} \quad (3\cdot2\cdot2a)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \int^r dr r' \zeta(r') - \frac{h(\theta)}{r} \quad (3\cdot2\cdot2b)$$

を得る。 v_θ の右辺最後の項は θ 依存性のため多価関数になっている。観測量にこのようなことがあってはいけけないので, 最終的には $h \rightarrow 0$ としてこの点を回避する。

定常という条件でもとの NS 方程式は

$$v_r \partial_r v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = \nu \left(\nabla^2 v_r + \frac{1}{3} \partial_r \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta v_\theta \right) - \frac{\partial_r P}{\rho} + f_r \quad (3\cdot2\cdot3a)$$

$$v_r \left(\partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_\theta = \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{1}{3r} \partial_\theta \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) - \frac{\partial_\theta P}{r\rho} + f_\theta \quad (3\cdot2\cdot3b)$$

であるが, $\partial_\theta P = 0$ であるから, f が保存力であることから $f_\theta = 0$ でもある。また, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ が成り立っている。よって, (3・2・3b) の式は (3・2・2) の v_θ を代入することにより

$$\frac{\ln r}{r} \left(\partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = -c \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (3\cdot2\cdot4)$$

となる。ここで $\nu/h' \equiv -c$ である。上に述べた理由により, h' は限りなく 0 に近づけなければいけない。このとき, 自明でない解は, 無次元数 c を一定に保ちながら $\nu, h' \rightarrow 0$ として

$$v_\theta'' + \frac{3}{r} v_\theta' + \frac{1}{r^2} v_\theta = \frac{c_1}{r} e^{-(\ln r)^2/2c} \quad (3\cdot2\cdot5)$$

を境界条件 $v_\theta(0) = 0$ のもとで解くことで得られる。 c_1 は定数である。無限遠で発散しないためには $c > 0$ でなければならない。これは, 極限をとる途中で $h' < 0$ を意味するので, (3・3・3) の v_r は $r > 1$ で負, すなわち遠方の流体は原点に向かって流れ込んでいる。これに対し, 軸近くでは流れは外向きである。圧力は, 状態方程式がわかれば (3・2・3a) から決定できる。また, ρ が定数か, たかだか r のみの関数とすると, 連続の式も満たされている。ここで現れた新たなパラメータ c は, 動粘性係数と動径方向の典型的流速との比で, いわば動径方向の流れに関する Reynolds 数 (の逆数) である。

上記の解は、変異方程式 (2・3・7) と両立することを示す。重要な点は、考えている状況の下では X_2 として

$$X_2 = \nu\beta(r)\theta \quad (3\cdot2\cdot6)$$

のかたちが許されるということである。 X_2 自体は観測される物理量ではないので多価関数でもかまわない。 $\beta(r)$ は现阶段では未知の関数である。このとき、(2・3・7) の X_2 項が r 依存性のみをもつことは容易に示すことができる。

$\nabla X_2 = (\nu\partial_r\beta\theta, \nu\beta/r, 0)$ であるから、(2・3・7) は $j_c=0$ (Schrodinger 方程式の位相 $\delta=0$) として

$$\partial_r\rho_c\partial_r\ln\zeta' = -\partial_r^2\rho_c - \frac{1}{r}\partial_r\rho_c - \frac{\beta\partial_r\rho_c}{r\rho_c} \quad (3\cdot2\cdot7)$$

と変形される。 $\partial_r\rho_c \neq 0$ の領域で両辺を $\partial_r\rho_c$ で除し、次いで r に関して積分すると

$$\ln(\partial_r\rho_c\zeta') = -\int^r dr\left(\frac{1}{r} + \frac{\beta}{r\rho_c}\right) \equiv \ln G(r) \quad (3\cdot2\cdot8)$$

を得る。これより G が

$$G(r) = d\zeta(r)/dr \quad (3\cdot2\cdot9)$$

と表され、 β が (3・2・8) を通して

$$\beta(r) = -\left(1 + r\frac{d^2\zeta/dr^2}{d\zeta/dr}\right)\rho_c$$

のように決まる。結果的に、変異方程式とつじつまが合っている。

ここで得られた、非圧縮性の仮定の下での解は高橋 (2012)、Takahashi (2013) によって調べられた。図 1 に c の小さい値についての結果を示している。

速度場の成分数が 2 以上であることを利用して $\nu \rightarrow 0$ の極限の解を求めたのであるが、それは変数 r とパラメータ c の全領域で有限で C^∞ 級である。このような解は、NS 方程式で初めから $\nu=0$ とおく Euler 方程式 (以下の【台風現象との比較】の項も参照されたい) から、また、NS 方程式が $\nu=0$ で特異的であることに着目した摂動法によっても得られない。後者の点は、図 1 に示したように、解に境界層がないことから明らかである。(特異問題の摂動法については、例えば Holmes 2013、柴田 2009 を参照のこと。) 以下で、この解の物理的意味について考察する。

【台風現象との比較】

ここで、台風または熱帯性低気圧との関連について特記しておきたい。興味深いことに、

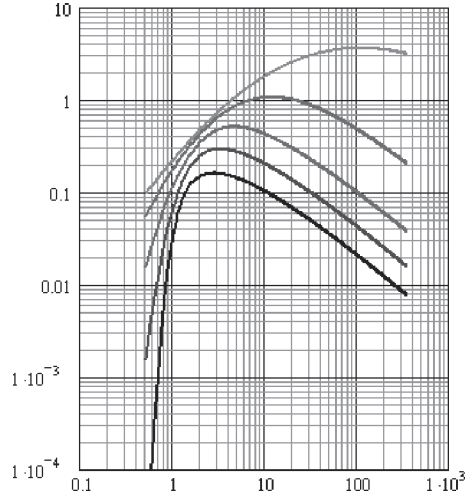


図 1. 無粘性流の v_θ の r 依存性。境界条件は、 $v_\theta(0) = v_\theta(\infty) = 0$ 。下から順に $c=0.03, 0.1, 0.3, 1$ および 3。(3.2.5) の c_1 はすべて 1。縦軸、横軸ともに任意目盛りである。

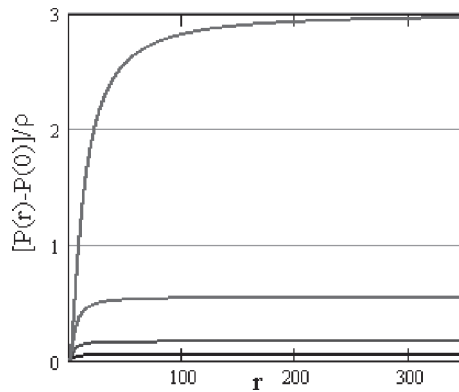


図 2. $r=0$ での圧力との圧力差の r 依存性。下から順に $c=0.03, 0.1, 0.3$ および、1。縦軸、横軸ともに任意目盛りである。

ここで見いだされた v_θ は、熱帯性低気圧（台風）の水平方向の速度分布を表すのに気象学で用いられている現象論的関数—中心付近で 0 から線形的に増加し、ある半径 r_{\max} で最大値に達し、その後滑らかに ($\sim 1/\sqrt{r}$) 減少する—といくつかの点でよく似ている (Emanuel 2004, Holland 2010, Takahashi 2012)。われわれの解では、無限遠方では $\ln r/r$ のように減少するのであるが、中間域ではこれが $1/\sqrt{r}$ の振る舞いと数値的に似ているのである。

関連して、圧力の半径依存性も導出された (図 2)。これも、気象学上の経験則 (Fijita 1952。そこでは、データは 1934 年 9 月の衰弱過程にある室戸台風から取られた。) とよく合致する結果となっている。

気象学的現象論は台風現象を流体力学的と同時に熱力学的に捉えようとする。すなわち、

海面から湿った空気を吸い上げ、上空で潜熱を放出することや、それに伴う低空から上空に至る空気の循環の様子は熱機関そのものであり、そのメカニズムが目を含む台風の構造をつくり出すと考えるのである。しかし、われわれの結果は、成熟した台風の基本的性質を純粋に流体力学的に理解できる可能性を示している点で大変興味深い。もちろん、台風の誕生と成長の理解に熱力学は欠かせない。

成熟した一般的な台風において粘性はどの程度の役割を担っているのだろうか。これを見るために、典型的な粘性応力項と遠心力項の比を取ってみる。これは (3.2.3) から

$$(\nu v_{\theta, \max} / r_{\max}^2) / (v_{\theta, \max}^2 / r_{\max}) = \nu / r_{\max} v_{\theta, \max}$$

で与えられる。これに空気の動粘性率 $\nu \sim 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 、台風の暴風域の半径 $r_{\max} \sim 2 \times 10^5 \text{m}$ 、最大風速 $v_{\theta, \max} \sim 30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ を代入すると 0.2×10^{-11} という非常に小さな値を取る。定常的な気象学的現象を理解する上では ν を 0 としてよい理由が、ここにあると思われる。

比較のために、家庭用風呂桶の排水口から流れる水の場合について、同様の見積もりを試みよう。水の動粘性率 $\nu \sim 1 \times 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $r_{\max} \sim 0.01 \text{m}$ 、 $v_{\theta, \max} \sim 0.1 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ とすると

$$\nu / r_{\max} v_{\theta, \max} \sim 10^{-3}$$

となり、台風に比べずいぶん大きい。この場合は、粘性を無視することはできないであろう。

われわれは、上記の解を得るに当たって $\nu \rightarrow 0$ の極限を取っている。この極限に対応する流れは、通常は (1.1) で $\nu = 0$ としたオイラー方程式

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f}$$

で記述されると考える。言い換えると、粘性応力が他の力に比べて無視できるほど小さいときの流れは、粘性項を初めから無視したオイラー方程式の解で近似できるとする。

v_{θ} についてのオイラー方程式は、この場合

$$v_r \left(\partial_r v_{\theta} + \frac{v_{\theta}}{r} \right) + \frac{v_{\theta}}{r} \partial_{\theta} v_{\theta} = -\frac{\partial_{\theta} P}{r \rho} + f_{\theta} = 0$$

となるが、 θ 依存性が無いという条件の下では、解は $v_r = 0$ または $v_{\theta} \propto 1/r$ となる。後者は、これまでに知られていた多くの解の振る舞いと同じである。われわれの方程式 (3.2.4)、(3.2.5) は、 $\nu \rightarrow 0$ の極限の取り方に特徴があり、無粘性でありながら Euler 方程式とは本質的に異なっている。また、得られた解は、結果的に熱帯性低気圧現象のある面をよく再現するものとなっている。この事情から、方程式 (3.2.5) から得られた上記の解は、‘厳密解’ (あるいは‘近似解’との中間に位置するもの) と見なすことにしたい。これは、 $\nu \rightarrow 0$ の極限の

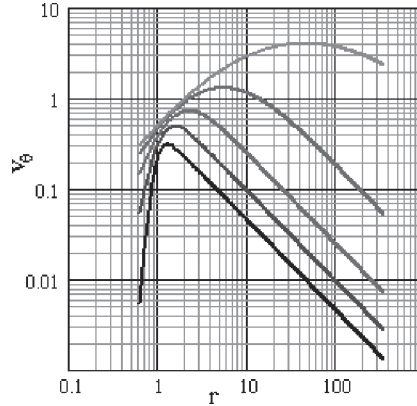


図3. 下から順に $c=0.03, 0.1, 0.3, 1$ および 3 に対する圧縮性流体の v_θ の r 依存性。縦軸，横軸ともに任意目盛りである。

解は‘近似解’であるとする Drazin ら (2006) の立場とは微妙に異なるものである。

B 回転する円筒の周囲の流れ

v_θ を表す (3.2.2b) には，計算の途中の段階とはいえ， θ の 1 次関数 $h(\theta)$ が現れるのが少々気持ち悪い。 θ はデカルト座標について多価関数だからである。

(3.2.2b) から敢えて h を取り除いたものを v_θ として最初から採用するとどうなるだろうか。このときは (3.2.2a) と連続の式より

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{h_1}{r^2}$$

$$\rho \propto |\ln r|^{-1}$$

で，弱い非圧縮性の条件は満たされないが， ν を常に有限としてよいという好ましい状況がある。面白いことに，このときは厳密解が次のように求まる：

$$v_\theta = -\sqrt{2\pi c^3} G_0 e^{c/2} r^{-1} \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \ln r - 2\sqrt{c}\right) \quad (3.2.10)$$

この v_θ は， r の全領域で正則で同符号であり， $r \rightarrow 0$ および $r \rightarrow \infty$ でそれぞれ $(r^2/\ln r)e^{-(\ln r)^2/2c}$ および $1/r$ のように振る舞う。遠方では循環 $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ は有限である。これに対し， $r < 1$ では v_r は正である。また， $r=0$ に特異点がある。(3.2.2) の v_r を，回転している円筒の外部の解と見なすことでこの特異点を回避できる。円筒の半径を R ，回転角速度を Ω とすると， $R\Omega = v_\theta(R)$ である。 $v_r(R) < 0$ なら，円筒表面は吸い込み面で， $v_r(R) > 0$ であれば吹き出し面である。特に $R=1$ のときは，吸い込みも吹き出しもない。 v_θ の r 依存性を，いくつかの c について図 3 に示す。

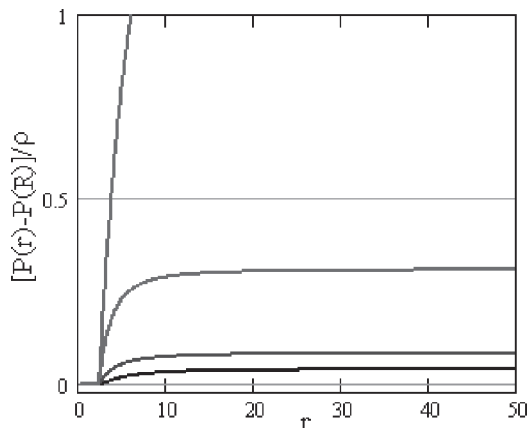


図4. 圧縮性流体について、下から順に $c=0.03, 0.1, 0.3, 1$; $h_1=-1$ に対する $R=2.52$ での圧力との圧力差の r 依存性のプロット。縦軸、横軸ともに任意目盛りである。

圧力は、外力がないとき (3.2.2a), (3.2.3a) より

$$\partial_r P = \rho \left(-\frac{8}{3} \frac{\nu h_1}{r^3} + h_1^2 \frac{\ln r (\ln r - 1)}{r^3} + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \quad (3.3.8)$$

で決められる。括弧の中は r によっては負になりうる。他方、経験によれば (Fujita 1952) 圧力勾配は常に正であるように見える。 $h_1 = -1$ として積分したものの例を図4に示す。

この解を台風現象と対応させようとしたときに、外部解と $r=R$ で接続する内部解をどのように作るべきかは現段階では未解決である。

C 風の第2ピークと摂動

既に述べたように、A で求めた境界のない解は、台風の水平風速度分布をよく再現する。しかしそれはあくまで平均の意味においてであって、実際の風の速度場は空間的・時間的に複雑な様相を呈する。特に興味深いのは、水平風速の第2ピーク（場合によっては第3ピークも）の生成と消滅の現象である。すなわち、図1に見られる v_θ のピークの外側に二つ目のピークが現れ、それが次第に移動して第1のピークと合体したり第1のピークが衰えて消滅する現象が頻繁に見られるのである (Willoughby 他 1982)。

第2ピークの形成と消滅を理解するためのいくつかの試みがある (Willoughby (1979) による地形変化説, Emanuel (2003) による海洋-大気間熱移動説, Kuo 他 (2008) の渦間相互作用説などがある。Wesley と Montgomery (2008) は、精密な数値計算によって、第2ピークの形成が軸対称からの変形、渦度の大きな空間的变化などによって起きることを示唆している) が、確立した理論はまだ存在しない。Takahashi (2013) は、A で得られた解の回りの

特殊な摂動の‘固有値’が空間座標依存的であることを見いだした。‘特殊な’とは、圧力以外の摂動を考慮するということである。このことより、モード 0 以外の摂動のもとで v_θ に複数のピークが現れ、そのうち第 2 ピークが一番明瞭であること、および、第 2 ピークが移動して第 1 ピークと合流することを示すことができる。

D 3 節のまとめ

(3.2.5) の解あるいは解 (3.2.10) は、これまで知られていた 2 次元軸対称回転流とはまったく異なる振る舞いを示す点で注目に値する。われわれの‘変異方程式’についていえば、これは X_2 項の効果によるものである。これまでの解は Stokes (1845), Preston (1950), Hocking (1963) らによって見つけられたもので、 $r=0$ で v_θ は発散、また、特別の場合を除き、 $r=\infty$ で v_θ が発散する*。このため、物理的に意味のある解は、二つの同心円筒の間に流体がある場合に限って存在することになる。定常流が存在するためには、円筒を軸の周りに回転させる必要がある。

* 3 次元解には Burgers (1948) によるものがあるが、やはり遠方で発散する。非定常解では Oseen (1911) によるものがある。

これに対し、(3.2.5) の解あるいは解 (3.2.10) では、無境界でありながら、 v_θ は $r=0$ の近辺で十分小さくなり、また $r=\infty$ で 0 となる。ある $r=r_{\max}$ で速度は最大になり、その値は c が大きいほど大きい。 $r=0$ に近づくにつれ v_θ は急速に小さくなり、中心付近で‘目’が形成されることも特徴的である。内側に向けての圧力勾配が回転による遠心力と釣り合っている結果である。

例 3 非定常流—非減衰進行密度波—

この例では、時間に依存する Schrödinger 方程式の解が平面波の重ね合わせによる場合について、位相 δ に加え ρ_c のかたちも与えて解を求めることを考える。

ポテンシャルがないとき、平面波の重ね合わせ

$$\psi = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{-i\omega_j t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}, \quad \omega_j = \frac{\mathbf{k}_j^2}{2m}$$

は Schrödinger 方程式の解である。ここでは $N=2$ 、また簡単のため α_j は実数とする。このとき

$$\begin{aligned} \rho_c &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \omega &= \omega_1 - \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \end{aligned} \tag{3.3.1a}$$

$$\tan \delta = \frac{\sum_j \alpha_j \sin(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})}{\sum_j \alpha_j \cos(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} \quad (3\cdot3\cdot1b)$$

であり、一般に ρ_c と δ に時間依存性がある。それぞれの勾配は

$$\nabla \rho_c = 2\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{k} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3\cdot3\cdot2a)$$

$$\nabla \delta = -\frac{1}{\rho_c} (\alpha_1^2 \mathbf{k}_1 + \alpha_2^2 \mathbf{k}_2 + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{K} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \quad \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (3\cdot3\cdot2b)$$

である。(3·3·2a, b) は、この系の自由度は実質的に 1 であることを示している。変異方程式 (2·3·7) は

$$(\nabla \rho_c)^2 \frac{\zeta''}{\zeta'} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\nu} \mathbf{K} \cdot \mathbf{k} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\nu} \mathbf{k} \cdot \nabla (\nu \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \frac{1}{\nu} \nabla X_z \times \nabla \ln \rho_c|_z$$

となる。両辺を $2\alpha_1 \alpha_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ で割って、(3·3·1a), (3·3·2a) を使うと

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \ln \zeta' = \frac{a \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}}{\nu} - \mathbf{k} \cdot \nabla \ln \left(\frac{\nu}{2\alpha_1 \alpha_2 k^2} \mathbf{k} \cdot \nabla \rho_c \right) + \frac{\nabla X_z \times \mathbf{k}|_z}{\nu \rho_c} \quad (3\cdot3\cdot3)$$

ζ は ρ_c を通してのみ \mathbf{r} 依存性を持つという仮定より、 X_z 項が有限の寄与をするのは ∇X_z が \mathbf{k} と独立な定ベクトルに ρ_c の関数がかかっている場合である。そこで、 X_z として次のかたちを考えよう：

$$X_z = \nu \rho_c \beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \quad (3\cdot3\cdot4)$$

\mathbf{q} は $\mathbf{q} \times \mathbf{k} \neq 0$ なる非ゼロベクトル、 β は $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ の任意の関数である。すると (3·3·3) は

$$\ln \left(\frac{\nu \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta}{2\alpha_1 \alpha_2 k^2} \right) = -\frac{a \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}}{\nu k^2} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{k}|_z}{k^2} \int^{\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\xi \beta(\xi) \quad (3\cdot3\cdot5)$$

β は任意関数なので ζ は $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ の任意の関数ということになる。

一つの例として、 c_1, c_2 を定数として

$$\zeta = -c_1 e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t}, \quad A_z = \frac{c_1}{k^2 c_2^2} e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \quad (3\cdot3\cdot6a)$$

$$v_x = \frac{c_1 k_y}{c_2 k^2} e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} + V_y, \quad v_y = -\frac{c_1 k_x}{c_2 k^2} e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} - V_x. \quad (3\cdot3\cdot6b)$$

の場合を考える。 \mathbf{V} は定数ベクトルである。これは弱い非圧縮性の条件 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を満たしていることに注意せよ。 $\mathbf{q} = (-k_y, k_x, 0)$ として、もとの NS 方程式は

$$\frac{c_1 \mathbf{q}}{k^2} (\omega - k_x V_y + k_y V_x) e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} = -\nu c_1 c_2 \mathbf{q} e^{c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{f} \quad (3\cdot3\cdot7)$$

また、関数形 $\rho = \rho(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ を仮定すると、連続の式より

$$\omega = k_x V_y - k_y V_x \quad (3\cdot3\cdot8)$$

という分散関係が得られる。したがって、NS 方程式 (3.3.7) の左辺の加速度項は 0 となり、右辺の粘性項、圧力勾配項および外力項が釣り合うことになる。これを満たすのは、 ρ_0, c_3 を定数として

$$\rho^{-1} = \rho_0^{-1} + \frac{c_1 c_2 \nu}{c_3} e^{c_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.3.9)$$

$$\mathbf{P} = P_0 - c_3 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{f} = -c_3 \rho_0^{-1} \mathbf{q}$$

である。(3.3.9) で与えられる \mathbf{f} は保存力である。関数 β の任意性により c_2 は複素数も許される。このとき、速度場、渦度のような物理量は (3.3.6) で実部をとるとすればよい。特に c_2 が純虚数のとき、解は、圧縮性流体中の非減衰進行密度波となる。(3.3.3), (3.3.4) より、進行する三角関数波は X_z 項の存在により可能になっていることがわかる。ただし、この‘波’の速度は $\mathbf{c} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = (V_y, -V_x, 0)$ で、(3.3.6b) より流体の平均流速に等しい。すなわち、流体の静止系で見れば、定在波になっている。

例 4 減衰非定常流

最後に、 ρ_c の時間への依存の仕方として

$$\rho_c = f(t)g(x) \quad (3.4.1)$$

の形をもつ空間 1 次元の流れを調べよう。量子論的波動関数との対応は考えない。保存流の条件より

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_c = -\dot{\rho}_c = -\dot{f}g \quad (3.4.2)$$

(2.3.7) の係数因子を求めると、 $\nabla \rho_c = (fg', 0, 0)$ 、 $(\nabla \rho_c)^2 = f^2 g'^2$ (g 上のプライムは x に関する微分) なので

$$\frac{1}{\nu(\nabla \rho_c)^2} (\nu \nabla^2 \rho_c + \nabla \cdot \mathbf{j}_c) = \frac{g''}{fg'^2} - \frac{\dot{f}g}{\nu f^2 g'^2} = \frac{gg''}{\rho_c g'^2} - \frac{\dot{f}g^3}{\nu \rho_c^2 g'^2} \quad (3.4.3)$$

である。したがって変異方程式は

$$(\ln \zeta'(\rho_c))' = -\frac{gg''}{\rho_c g'^2} + \frac{\dot{f}g^3}{\nu \rho_c^2 g'^2} \quad (3.4.4)$$

となる (左辺のプライムは ρ_c に関する微分) が、われわれの議論の前提より、この右辺は ρ_c のみの関数でなければならない。そうなるために f が満たすべき最も簡単な性質は

$$\dot{f} = af^p \quad (3.4.5)$$

であろう。というのは、このとき (3.4.4) の右辺が

$$-\frac{gg''}{\rho_c g'^2} + \frac{fg^3}{\nu \rho_c^2 g'^2} = -\frac{gg''}{\rho_c g'^2} + \frac{\alpha \rho_c^{p-2} g^{3-p}}{\nu g'^2}$$

となり, ‘ ρ_c のみの関数’ という要請が

$$(i) \quad p \neq 1 \text{ のとき: } \frac{gg''}{g'^2} = \beta, \quad \frac{g^{3-p}}{g'^2} = \gamma \quad (3\cdot4\cdot6a)$$

$$(ii) \quad p = 1 \text{ のとき: } -\frac{gg''}{g'^2} + \frac{\alpha g^2}{\nu g'^2} = \delta \quad (3\cdot4\cdot6b)$$

という, 解を持つ方程式の組に帰着するからである。ここで, β, γ, δ は定数である。以下で, 上のそれぞれの場合の解について述べる。

(i) $p \neq 1$

二つの方程式からの解

$$\beta = \frac{3-p}{2}, \quad f = (\alpha(1-p)t)^{\frac{1}{1-p}}, \quad g = \left(\frac{(p-1)^2}{4\gamma} x^2 \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3\cdot4\cdot7)$$

より

$$\rho_c = fg = \left(\frac{1-p}{4\alpha\gamma} \frac{x^2}{t} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3\cdot4\cdot8)$$

である。このとき (3.4.4) は

$$(\ln \zeta'(\rho_c))' = \frac{p-3}{2\rho_c} + \frac{\alpha\gamma\rho_c^{p-2}}{\nu} \quad (3\cdot4\cdot9)$$

となり, これを解いて

$$\zeta' \propto \rho_c^{\frac{p-3}{2}} e^{\frac{\alpha\gamma}{\nu(p-1)}\rho_c^{p-1}} \propto \left(\frac{x^2}{t} \right)^{\frac{p-3}{2p-2}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \quad (3\cdot4\cdot10)$$

を得る。速度場は v_y 成分だけを持つので (2.1.4b) は拡散方程式と同じ形になるが, 上記の解がこれを満たすことは, (3.4.4) と (3.4.8), (3.4.9), および

$$\zeta'' = \left(\frac{p-3}{2\rho_c} + \frac{\alpha\gamma\rho_c^{p-2}}{\nu} \right) \zeta', \quad \partial_t \zeta = \frac{1}{1-p} \frac{\rho_c}{t} \zeta', \quad \partial_x \zeta = \frac{2}{p-1} \frac{\rho_c}{x} \zeta', \quad \partial_x^2 \zeta = \partial_x^2 \rho_c \zeta' + (\partial_x \rho_c)^2 \zeta''$$

を用いて (2.1.4b) の各項を直接評価して確かめることができる。速度場は適当な境界条件を課すことで数値的に決定できる。

(ii) $p = 1$

(3.4.6b) は

$$g'' + \delta \frac{g'^2}{g} - \frac{\alpha}{\nu} g = 0 \quad (3\cdot4\cdot11)$$

という, ‘疑似’ 線形方程式 (重ね合わせの原理が成り立たない) になり

$$g \propto e^{kx}, \quad k = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{(1+\delta)\nu}} \tag{3.4.12}$$

を得る。また $f \propto e^{\alpha t}$ なので、

$$\rho_c \propto e^{\alpha t + kx} \tag{3.4.13}$$

となる。他方、渦度は

$$(\ln \zeta(\rho_c))' = \frac{\delta}{\rho_c} \tag{3.4.14}$$

より

$$\zeta \propto \rho_c^{\delta+1} = e^{(\delta+1)(\alpha t + kx)} = e^{\omega t \pm \sqrt{\omega/\nu} x} \tag{3.4.15}$$

を得る。ここで $\omega \equiv \alpha(\delta+1)$ とおいた。これは位相速度 $\sqrt{\nu\omega}$ で伝播する‘波’を表す。速度場は適当な境界条件を課すことで容易に決定できる。

4. まとめ

この論文では、任意の連続の式と NS 方程式から、回転的 2 次元流の渦度 ζ に関する線形の微分方程式を導いた。次に、 ζ は Poisson 方程式に従う流れ関数 A_z の‘源 (source)’になることを用いて A_z を求め、そこから回転的速度場を‘厳密に’決定した。この過程で、任意の保存流が流体力学的な量に‘変異’するのである。保存流をつくるもととなる量子力学的波動関数と NS 方程式の解との対応は、自由度 1 の場合は以下の表ようになる。(() 内および‘-’は、本論文では調べていないものである。)

自由度が 2 で X_z 項が無い 2 進行波の場合は、Berker (1963) の‘交わる二つの平面がつくる隅への流れ’が得られる (Takahashi 2013)。保存流をつくるに際し、本文で取り上げた三つの例では量子力学を参照したが、実は微分可能な関数で表される保存流があることが重要な点である。

われわれが用いた ζ の変異方程式 (2.2.8) は保存力である外力項を含まない。また、方程

表 1. 波動関数の型および X_z 項からの寄与の有無による NS 方程式の解

自由度	波動関数	X_z 項 = 0	X_z 項 ≠ 0
1	定在波	(Couette-Poiseuille の解)	無粘性台風解
1	1 進行波	一般化された Couett-Poiseuille の解	-
1	2 進行波	-	進行密度波
2	2 進行波	Berker の解	-

式 (2.3.7) では圧力項も消去されている。そこで、われわれの方法で速度場を求めるときは、最終的には、もとの NS 方程式に改めて代入し、速度場に含まれる未定定数および圧力と外力を決定する必要がある。知られている外力のもとで物質の運動を算出するのが通常の力学の方法であるが、われわれの方法はこれとは逆の向きを辿るものであり、一種の逆問題を扱っていることになる。

本文では、われわれの方法により、NS 方程式のよく知られている厳密解やこれまで知られていなかった厳密解を導くことができることを示した。‘厳密解’の意味についての本論文での立場は、Drazin ら (2006) のそれとほとんど同じである。ただし、軸対称な無粘性の流れに対して $\nu \rightarrow 0$ の極限で得られた解は、 $\nu = 0$ の Euler 方程式の解とはまったく異なるもので、本論文では厳密解（または近似解との中間に位置するもの）と見なしている。

軸対称な解はこれまで知られていたものとは異なり、速度場が対称軸付近で小さな値をとり、ある動半径で最大値をとる。そのような性質を長時間保つ非圧縮性の解が存在するはずであることは、Zadzińska ら (2009) によって証明されていた。なお、2次元で有限な解が一意的に存在するための十分条件-許される初期条件の範囲、外力の時間依存性-は Ladyzhenskaia (1959) によって調べられている。しかし、その具体的な関数形は解明されていなかった。本文で見いだされたものは、無粘性という条件でのその最も簡単な例になっている。この静的解のまわりの摂動まで含めて、熱帯性低気圧の気象学的特性を、目の存在まで含めてある程度再現していることも興味深い。

ここで見いだされた解の安定性—リペラーなのかアトラクターなのか、もしアトラクターであればその引力圏はどのようなものか—はいまのところ不明である。これを知るためには Takahashi (2013) の研究法を拡張して圧力と密度も含めた摂動計算を行うことが必要で、これは今後に残された問題である。

解の実質的な力学自由度が1の場合には、われわれの方法は特に有効であり、適当な ρ_c と δ の組を用いることにより、数値解まで含めてさらに多くの解を得ることが可能になるであろう。自由度が2以上の場合に形式的に拡張することは容易である。さらに、ここで紹介した方法によって、表1に示したように、NS 方程式の解を新たな観点から分類することが可能になるであろう。今後の課題の一つは、自由度が2以上の変異方程式を解析的に取り扱う一般的な方法を見つけることである。変異方程式が線形であるという事実は、そのための有力な足がかりになるかもしれない。

参考文献

- Berker R 1963 *Encyclopedia of Physics* (ed. Flugge S) **VIII/2** Springer (Berlin) 1.
- Bhattacharjee J K 1987 *Convection and Chaos in Fluids* World Scientific (Singapore)
- Burgers J M 1948 *Adv. Appl. Mech.* **1** 171.
- Drazin P and Riley N 2006 *The Navier-Stokes Equations A Classification of Flows and Exact Solutions* Cambridge Univ. Press.
- Emanuel K A 2004 *Atmospheric Turbulence and Mesoscale Meteorology*, Federovich E et al (eds) Cambridge Univ. Press.
- Fujita T 1952 *Geophys. Mag.* **23** 438.
- Hirsch M W, Smale S and Devaney R L 2004 *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos* (Elsevier) Chap.1.
- Hocking L M 1963 *ALAA J.* **1** 1222.
- Holland G J, Belanger J I and Fritz A 2010 *Mon. Wea. Rep.* **138** 4393 and references cited therein.
- Holmes M H 2013 *Introduction to Perturbation Methods* (Springer), Chap.2.
- Kampe de Fariet J 1930 *Proc. Int. Congr. Appl. Mech. 3rd Stockholm* 334 ; 1932 *Verh. Int. Math. Kongr. Zurich* **2** 298.
- Kuo H C, Schbert W H, Tsai C L and Kuo Y F 2008 *Mon. Wea. Rev.* **136** 5183.
- Ladyzhenskaia O A 1959 *Comm. Pure Appl. Math.* **12** 427.
- Liu H and Tadmor E 2003 *Proceedings of the 9th International Conference in Pasadena* (Hou T and Tadmor E, eds. Springer) 227.
- Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130.
- Navier C -L -M -H 1827 *Mem. Acad. Sci. Inst. France* (2) **6** 389.
- Oseen C W 1911 *Ark. Mat. Astron. Fys.* **7** 14.
- Poisson S -D 1831 *J. Ec. Polytec.* **13** cahier **20** 1.
- Preston J H 1950 *Aeronaut Q* **1** 319.
- Saint-Venant B 1843 *C. R. Acad. Sci. Paris* **17** 1240.
- Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (archive.org/details/QuantumMechanics_500).
- Stokes G G 1845 *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **8** 287.
- Takahashi K 2013 *Faculty of Liberal Arts Review, Tohoku Gakuin Univ.* **164** 65 (http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2013/pdf/no01_04.pdf).
- Tsien H S 1943 *Q. Appl. Math.* **1** 130.
- Wang C Y 1989 *Appl. Mech. Rev.* **42** S269.
- Wang C Y 1990 *Acta Mech.* **81** 69 ; 1991 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **70** 351.
- Wesley D T and Montgomery M T 2008 *J. Geophys. Res.* **113** D12112.
- Willoughby H E 1979 *J. Geophys. Res.* **84** (C6) 3173.
- Willoughby H E, Clos J A and Shoreibah M G 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 395.
- Zadrzyńska E and Zajączkowski W M 2009 *J. Math. Fluid. Mech.* **11** 126. See also references therein.
- 岡本久 [Okamoto H] 2010 *数学セミナー* (日本評論社) **49** 8.
- 藤田宏 [Fujita H] 2010 *同* **49** 13.
- 大木谷耕司 [Ookitani K] 2010 *同* **49** 18.
- 山田道夫 [Yamada M] 2010 *同* **49** 23.
- 鵜飼正二 [Ukai S] 2010 *同* **49** 28.
- 小蘭英雄 [Kozono H] 2010 *同* **49** 34.
- 柴田正 [Shibata T] 2009 *漸近級数と特異摂動法：微分方程式の体系的近似解法* (森北出版) 第 4 章.
- 高橋光一 [Takahashi K] 2012 *2012 年度日本気象学会東北支部研究会講演* (仙台) (支部便り第 75 号 <http://wind.gp.tohoku.ac.jp/msj-tohoku/letters/letter75.pdf>).