

ナビエ-ストークス方程式の軸対称渦解——初期値敏感性およびエネルギー有限性——1.  
初期値敏感性について

メタデータ	言語: ja 出版者: 公開日: 2024-01-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 高橋, 光一 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://tohoku-gakuin.repo.nii.ac.jp/records/2000084">https://tohoku-gakuin.repo.nii.ac.jp/records/2000084</a>

# ナビエ-ストークス方程式の軸対称渦解： 初期値敏感性およびエネルギー有限性

## 1. 初期値敏感性について

高 橋 光 一

The Navier-Stokes (NS) equations have been studied to unveil the nature of viscous flows, in particular, of turbulences, which are developed by complex dynamics among vortices. A large number of vortical motions that the NS equations permit have been reported by means of analytical and numerical methods. For reviews, readers can refer to Wang (1991), Drazin and Riley (2007), Dyck and Straatman (2020) and references cited therein. The equation by Bellamy-Knights (1970, 1971) may be the simplest one for the systematic search of three-dimensional unsteady axisymmetric vortex solutions. Recently, Takahashi (2022a, b) presented a method of analyzing the Bellamy-Knights equation for finding new vortex solutions, thereby shedding a new light to the profundity of the NS equations. The important outcome is that there exist regions of the initial condition to which the motions of vortices are extremely sensitive and are virtually not predictable. This aspect of the solutions may provide a hint for considering the well-known problem called Millennium Problem: For the three-dimensional system of the NS equations, and given some initial conditions, do smooth solutions always exist for given initial conditions? If so do, are they unique? This article aims at presenting a short review and a future perspective of the work by Takahashi (2022b) that may be related to the above questions.

Key words : Navier-Stokes equations, vortex, unsteady, boundary conditions

### 第1部 初期値敏感性について

- I. はじめに一流体力学と Cauchy 問題
- II. Burgers と Sullivan の定常渦解
- III. Bellamy-Knights の非定常渦解
- IV. Takahashi の非定常渦解
- V. 渦解と境界条件
- VI. コーシー問題との観測論的関連

### 第2部 エネルギー有限性について (予定)

- VII. エネルギー密度が有限の渦解を求めて
- VIII. 非定常軸対称粘性 Beltrami 渦の拘束条件と運動方程式
- IX. エネルギー密度が有限の渦解
- X. 境界面がある渦
- XI. 結論

## 第 1 部

## I. はじめに—流体力学と Cauchy 問題

流体力学の専門家はその古色蒼然たる基礎方程式を通してのみしか流体を見ないから、いつまでたってもその方程式に含まれていない種類の現象に眼の明く日はこない。

寺田寅彦『物理学圏外の物理的現象』

液体や気体が示す印象的な運動に渦がある。蚊取り線香からの渦巻く煙は夏の風物詩である。路上に掃き残された枯葉を舞い上げるつむじ風は、近づく冬を感じさせる。天と地をつなぐ竜巻（例えば Fiedler 1994, Lewellen 2002, Xia 他 2003）、海水の干満時に現れる渦潮も目に見える渦であり、人々の注意を引き付ける。鴨長明は「行く川の流れ」と「うたかた」を浮かべる「よどみ」に渦を見たであろう。R. デカルトは、天体の運動を宇宙空間に充滿する渦に帰そうとした。E.A. ポーは、巨大な渦の驚異を『大渦巻きへの落下 A descent into the maelström』で描き出した。A. ヒチコックの映画『めまい Vertigo』では、主人公の精神作用を表すのに渦の回転が要所に用いられた<sup>1</sup>。渦が芸術家の創作意欲の源泉になっていることは、現代のインターネットで容易に確認できる<sup>2</sup>。

旋風や竜巻が見えるのは、空気の流れに沿って動く砂、石、草木、などが見えるからである。はるかにスケールの大きい台風も似たものであることは、現代では衛星画像の雲の形で直感的に確認できる。中性子星やブラックホールの周りを周回しながら落下する雲も渦を形成する。アンドロメダ星雲のような渦巻銀河の形も渦を連想させる。

船の航跡に渦が見える。野球、ゴルフ、サッカーなどのボールや、走る動物、乗り物、飛行機など空気中を動かしたいのものは渦をつくることが知られている。多くの場合、渦は直接には見えないが、物体の周りにテープを置いたり染料を流したりする可視化法によって見ることができるようになる。日常生活でも、渦はその姿を現す。喫煙者は煙の輪を吐き出して楽しむことがある。洗濯は、渦の輪の働きで効率よく汚れを取り除くことができる (Jain 他 2023)<sup>3</sup>。渦は我が宇宙に遍在するので、この世界を深く理解するためには渦の科学は必須である。

<sup>1</sup> 映画の紹介と考察については、武田雄貴 2015『ヒッチコック『めまい』から学べること』（東北学院大学卒業論文）がある。

<sup>2</sup> 人間の脳に備わる特殊な画像処理法が人間を渦に引き付ける要因かも知れない。この稿の最後のページにある絵-図7-を切り取って厚紙に貼り、机の上でこまのように回転させ、それを暫く見つめた後に自分の手のひらを見ると何が起きるか。(Block 他 1989)

<sup>3</sup> [https://physics.aps.org/articles/v16/61?utm\\_campaign=weekly&utm\\_medium=email&utm\\_source=emailalert](https://physics.aps.org/articles/v16/61?utm_campaign=weekly&utm_medium=email&utm_source=emailalert) で動画をみることができる。

くわえて、効率と安全を追求する技術にとっても、渦の制御は重要な課題になる。モノを効率的に動かそうとすると、渦はしばしば邪魔者になる。動かすために投入したエネルギーの一部が、望まない渦をつくるという余分の仕事に使われるからである。渦は、消えるときには熱を発生し、エネルギーを散逸させる。大小の渦が次々に一見不規則につくられては消えていく流れは乱流と呼ばれ、流体の運動の予測不可能性の原因となり、飛行機にとってはしばしば重大事故の原因となる<sup>4</sup>。機械装置を安全かつ効率的に動かすために渦を理解することは、工学上の重要な課題である。

この点で、生物は人間の優れた先達である。彼らは、空中と水中で渦を巧みに制御しかつ利用することにより、複雑かつ効率的な空間移動を実現することができる驚異的な能力を長い進化の過程で自分のものとした。生物から学ぶことは多く、現在、渦を巡る多様な現象を究明すべく、生物工学が急速に発展しつつある（例えば Hedenström 2006 と引用文献, Tropea 他 2012 を参照）。

流れの力学の基礎を据えたのはトリチェリとされる (Dugas 1988) が、一見して‘乱れた’流れである乱流が物理学的に発見されたのは時代が下って 1883 年、レイノルズの円管水流の実験によってであった (Reynolds 1883)。レイノルズは、彼の実験装置において、管の直径と流速がある関係があるときに流れが乱流になることを確かめ、今日レイノルズ数 ( $Re$  で表される) と呼ばれる  $D$  (直径)  $\cdot V$  (流速)  $/ \nu$  (動粘性係数) を乱流への遷移の指標として提案した。

液体と気体をあわせて流体という。プラズマも流体である。蜂蜜や金属も、観測可能な流動性があるときは流体と見なす。これらは、原子や分子などの不連続な構成粒子が多数密に集まって形成される物質である。粒子の平均的な運動の効果だけを考えるのであれば、流体は、物理的性質を損なわずにどこまでも分割できる連続体とみなしてよいであろう。流体の一部分の速度をある時間をかけて計れば、個々の粒子の個性的運動は平均化され、流体全体としての速度が得られ、それは時間や流体の場所を連続的に変えれば連続的に変化するであろう。このように考えて、流体の微小部分に働く力を仮定してそこにニュートンの運動方程式を適用すると、流体の最も基礎的な運動方程式が得られる。これが Navier-Stokes (ナビエ-ストークス, 以後 NS) 方程式である。

流体に作用する力としては、流体内部の圧力と散逸による粘性力 (流体各部分の面を通して隣接する部分に作用すると考えるので、正確には粘性応力と呼ばれる。この力の原因は散

---

<sup>4</sup> 飛行中の大型飛行機の後ろにできる後方乱流 (または後方乱気流) は大きく比較的長時間存続する渦である。ここに後続の飛行機が進入すると、安定性が失われ事故に至ることがある。ウィキペディア上 (<https://ja.wikipedia.org/wiki/後方乱気流>) に幾つかの事例が紹介されている。

逸である)に加え重力や電磁気力などの外部からの力がある。NS 方程式では、粘性力は速度勾配に比例するとしている。NS 方程式は、外力および粘性力と圧力差による力の総和が運動量の変化率 = 加速度 = と釣り合っていることを表している。

NS 方程式は、時空間座標を独立変数、速度と圧力を従属変数とする 2 階の非線形偏微分方程式である。流体は、流れの状態が全体として変わらない定常流であっても、流体の各部分は動いていて加速度が存在している可能性がある。NS 方程式には、この事情を反映した移流項と呼ばれる項があって、これが非線形なのである。さらに、移流項は空間に関する 1 階の偏微分を含み、解の多様性と方程式を解く際の困難の元になっている。

流体の研究者は、乱流は NS 方程式を解くことで理解できると固く信じている。数学の解析的手法に加え、現在、コンピュータは方程式の数値解を探すための有力な道具で広く利用されている。コンピュータを使えば乱流の微細構造を瞬間瞬間において正しく知り予言もできると考えている研究者もいるほどである。彼らにとって、冒頭の寺田の言葉 (1932 年) は耳に痛い。しかし、乱流下の流れの挙動はコンピュータですべて理解できるわけではない。激しく変化する流体を記述できるためには、適当な近似法のもとで時空間を細かく分割した計算が必要で、その計算量は莫大となる (木田・柳瀬 1999)。個々の渦の構造と消長並びに相互の絡み合いを詳細に知ることは現在の技術では非常に難しい。さらに、乱流には初期値敏感性という特性があり、現実にかき起される乱流の長さにわたる挙動を時間的に正しく予言することは原理的に不可能である。この点が第 1 部の主題である。乱流の理論が、運動エネルギー、エンストロフィー (渦度の 2 乗。渦度とは速度の回転  $\text{curl } v$  のことである。下記を見よ) などの統計平均に関する現象論である所以である。また、コンピュータシミュレーションは数値の結果を出すだけで、そこからどのような物理的意味を引き出すか、例えば数値からどのような量を再構成してそれを可視化するか、は研究者がどのような乱流理論を用意しているかに依存する。この状況のもとでガイド役をするのは、NS 方程式の数学理論とエネルギー散逸に基づく統計理論である。寺田の懸念をよそに、現在、乱流の理解は理論、実験室実験、数値実験の三方向からゆっくりと着実に進められている (木田・柳瀬 1999, Davidson 2016)。

以下、理論的側面に話を限る。NS 方程式の解の性質については、その重要性にもかかわらず分からないことが非常に多い。数学的には、次の Cauchy 問題

任意のエネルギー有限の初期条件に対し、NS 方程式は大域的に正則な解を一意的に与えるか

がまだ解かれていない。ここで「大域的」は「いつまでたっても」を、「正則な」は特異点

の無い「滑らかな」振る舞いを意味している<sup>5</sup>。全エネルギーが無限大の場合、どこかに特異点がある解は容易につくることができる。エネルギーが有限という条件は、解に現実性を持たせるために必要で、物理学では、NS 方程式はその現実性を常に保証するかが問題なのである。

全ての特異点を、特異点であるという理由だけで排除することは、物理学においてはできない。Takahashi (2022b) で強調されたように、対数特異点のように、観測量に発散をもたらさない特異点もあるから、注意を要する。

統計的研究については、Kolmogorov (1941) が、より大きい渦がより小さい渦に分裂しながら最終的には消滅し、エネルギーを熱として散逸させるという Richardson 描像に沿った重要な道筋を見出した。実験室の中だけではなく、自然界の非常に大きなスケールの渦についてもこの描像は当てはまる可能性がある。乱流研究の具体的な方法及び成果及び課題については、1950 年以前に関しては Neumann (2013) を、以後については木田・柳瀬 (1999)、Davidson (2016) を参照されたい。

既に述べたように、乱流はさまざまな渦運動の集合で、その数学的分析は簡単でない。他方で、研究者は、より簡単と思われる 1 個あるいは少数個の渦の解析的解、いわゆる厳密解の探索にも関心を向けてきた。それにより、渦の内部や周辺で何が起きているかを理論的に厳密に知ることができ、乱流のモデルを構築する上でのヒントを得ることができると期待できるのである。厳密解が可能であることは、非圧縮性流体に対する Burgers (1948) と Sullivan (1959) の孤立定常解や Oseen (1911), Rott (1958) と Bellamy-Knights (1970, 1971) の孤立非定常解の発見で示された。解の形を仮定し、それを NS 方程式に代入して関数形を決めるという方法が多くの場合に採用されている (Drazin 他 2006)。Kambe (1984) は、この方法を応用して任意の初期条件から解を与える手法を提示している。

NS 方程式の特徴である非線形項の効果をある意味で抑えながら厳密解を探するという試みも長く続けられてきた。第 2 部で論じる Beltrami 流がそのような流れである (Gromeka 1881, Trkal 1919)<sup>6</sup> が、この戦術を渦解探索に適用する多くの研究がある (Shi 他, 1991, Dombre 他 1986, Ershkov 2016, Ershkov 他 2020, Ershkov 他 2021, Dierkes 他 2020, Moffat 2014, Dyck 他 2020)。Oseen の解は散逸効果のみによって形成される 2 次元渦で、現実の 3

<sup>5</sup> ここで「エネルギー有限」は物理的観点から付け加えた。大域的に正則でエネルギーが真性特異的に発散する解は存在するが、エネルギー源が無いときにそのようなことが実際に起きることはあり得ないからである。(以下で論じるように、対数特異性は可能である。) 数学の問題としては、この語句は付けないのが普通であるようだ。NS 方程式に関するこの問題は、クレイ数学研究所が賞金を掛けたいわゆるミレニアム問題として有名である。

<sup>6</sup> Beltrami, Eugenio (1835-1900) はイタリアの数学者。微分幾何学での業績で知られる。ロバチェフスキー-ボヤイの非ユークリッド幾何学を定曲率の面上のユークリッド幾何学に等値することに成功した。また、回転がそれ自身に平行な 3D ベクトルを考えた。

次元渦の理解にそのままを応用することはできない。他は 3 次元 (3D) 渦であり、乱流の解明にも有用であると考えられる。本稿で詳述するのは、それら 3D 解およびそれらと密接に関連する最近発見された 3D 孤立非定常渦解 (Takahashi 2022a, b) である。これらの元になった定常解に関する Takahashi (2014) の研究も参照されたい。

ここで渦の定義を与えておく。速度は Galilei 変換に対し不変でないので、渦巻き運動も Galilei 変換に対し不変でない。ある観測者が鳴門の渦潮のような渦巻き運動を見たとしても、彼に対して等速直線運動をしている別の観測者は滑らかな波打つような流れを見るということは起こりうるのである。渦が流れの座標系に依存しない本質を担うという考え方からすれば、可視的な渦巻き構造で渦を捉えることはできない (例えば Fridman 2007, 2008 を参照)。

そこで Galilei 変換に対し不変な速度の空間微分、すなわち速度勾配テンソルを考える。その対称成分を変形テンソル、反対称成分を渦度テンソルあるいは単に渦度と呼ぶ。変形テンソルは回転運動を生まない。渦の存在は、渦度が有限の値をとるかどうかで判断するのが有力な方法である。渦度と速度場には Biot-Savart の関係式が成立することからも、流れに備わる特異性の本質が渦度によって担われていると考えることができる (木田・柳瀬 1999)。渦度は空間の回転に対しベクトルのように振る舞う。

渦の視覚描像は渦巻き運動によるもので、直感的には空間的に大域的なものであるから、速度ベクトルを閉曲線に沿って積分した循環と呼ばれる量を用いるのが、渦を定義するもう一つの方法である。速度場が正則なら、Stokes の定理によって、循環は渦度の面積分に等しいことを思い出そう。

本稿では、Burgers と Sullivan の定常渦解、および Bellamy-Knights の非定常渦解に注目して、解の初期値に対する感性について、新しい知見を加えて総括する。

## II. Burgers と Sullivan の定常渦解

Burgers と Sullivan の定常渦解は共に対称軸 ( $z$  軸にとる) と対称面 ( $z = 0$ ) を持つ、境界の無い自由空間における最も単純な非圧縮性の定常解である。 $z$  軸の静止系で、流れは  $z$  軸の周りに渦巻きながら流れ込んだり流れ出たりする。 $z > 0$  を“上”、 $z < 0$  を“下”と呼ぶことにすると、対称軸に向かって流れ込む回転流は、いずれは対称軸に沿って上昇または下降する。対称軸と対称面の交点を原点とすると、原点が速度 0 の滞留点となり、その近くで流線が圧縮と引き伸ばしの作用を受けているのがわかる。速度場は無限度で発散する。すなわち、対称軸あるいは対称面から離れると速度場は距離に比例して限りなく大きくなる。圧力差が散逸を補うエネルギーを供給している。これらは自由空間中の微小渦の瞬間的なモデルと考えることができる。Burgers 渦の渦度は対称軸に平行で、Sullivan 渦では方位角方向に傾く。

渦の上部分を考える。Burgers 渦では、遠方から対称軸に向かって流れ込み、軸の近くで急速に上昇する流線を描く。Sullivan 渦では、軸からある距離にある円筒面で上昇流になる。その内側では、流れは軸付近を下降して円筒面に向かい円筒面に沿って上昇する。このような事情で、Burgers 渦はセルの数が 1 つ、Sullivan 渦では 2 つであるという。

Burgers 渦と Sullivan 渦は、発達・減衰のない成熟した竜巻や台風の記述に使えないかという期待が起きる。しかし竜巻と台風には、地面や海面と上空の対流圏界面あるいはそれより下にある気団境界面という境界があるので、話は単純ではない。さらに、境界があるとき、正則な定常解は存在しないことが分かっている (Takahashi 2015a)。実際、境界面のある定常渦解は、対数特異性を導入すればつくりることができる (Serrin 1972)。

厳密な定常解は諦め、代わりに境界面での適当な境界条件を満たすような Fourier 展開法を単純渦解をもとにして採用することもできる。この方法は、渦内の熱伝導も考慮すれば、台風のみならず (Takahashi 2015b)、太陽面光球内の状態も遷移領域も含め、それらの温度異常をよく再現できることがわかっている (Takahashi 2017)。

数値計算法が発達した現在、厳密解を探す意義があるのかという疑問が出されることがあるが、既に述べた理由のほかに、厳密解のこのような利用法もあるのである。

### III. Bellamy-Knights の非定常渦解

非定常渦解も多くの研究者が関心を向けてきた。定常渦よりも独立変数が増えるので、その探索はより難しくなる。この場合も、知られている定常解を基にして、その中で定数だった部分がどのような時間依存性を持てば NS 方程式を満足するかを調べて非定常解を見つけることができる。定常 Burgers 渦に対応する渦の研究としては、Moffatt (2000), Craik (2009), Kolomenskiy 他 (2012), Pandey 他 (2018) によるものがある。

NS 方程式は、レイノルズ数が同じすなわち動粘性係数を変えないとき管の直径と流速の積が同じなら流れも似たものになることを示唆している。空間や速度の尺度を適当に変えれば、流れのパターンは同じになるということである。空間と速度の積の次元は [距離]<sup>2</sup> [時間]<sup>-1</sup> である。そこで、ある空間座標、例えば対称軸からの距離  $r$  の 2 乗を時間で割った量を変数ととれば、NS 方程式をこの変数だけに支配される形に変換できるのではないかという期待が生まれる。Bellamy-Knights は  $\eta_B = r^2/vt$  という変数を用いればそれが可能であることを示し、新しい時間依存解を探した (Bellamy-Knights 1970, 1971)。

Bellamy-Knights の方程式はある任意の定数  $\gamma$  を含んでいる。 $\gamma$  と原点  $\eta_B = 0$  での境界条件が解のパラメータで、これを変えると、それに応じてセルの数が 1 から 3 までのいろいろな解が現れる。Bellamy-Knights は、2 種の正則な厳密解と無限遠点を除いて正則な数値解を  $\gamma$

と境界条件を変えて探し、時間とともに減速する解がある限られたパラメータ領域にのみ存在することを見出した。これらの渦解は、エネルギー源が無い場合に渦がどのように減衰するかを知る上で重要である。

無限遠での発散以外に、Bellamy-Knights の解には二つの気になる点があった。第一に、Bellamy-Knights 解を定常な Burgers 解や Sullivan 解に連続的につなげる方法が見当たらない。自然界では、竜巻や台風は、生まれてから成熟し減衰し消滅するまで連続的な変化の道を通る。定常渦解と非定常渦解は本来切り離された存在ではないはずである。第二に、Bellamy-Knights のパラメータ空間で、厳密解は数値解から一部で切り離されている。厳密解からわずかにずれた他の解は見つからなかったということである。厳密解はそれほど特殊なのだろうか。

パラメータ空間で互いに隔絶した定常 Burgers 渦と定常 Sullivan 渦は、パラメータを適宜変えると、物理的に意味のある非正則解を通して連続的につながることが知られている (Takahashi 2014)。同様に、Bellamy-Knights の厳密解を含む非定常解を互いに連続的につなげることはできるのではないのか。最近、Takahashi (2022a, b) によってこれらの問いに明確な答が見出された。

#### IV. Takahashi の非定常渦解

Takahashi (2022a, b) は以下の方法でより広範囲の非定常渦解を構成した<sup>7</sup>。まず、円筒座標系  $(r, \theta, z)$  で書かれた Bellamy-Knights の方程式 (Bellamy-Knights 1971, Drazin and Riley 2006)

$$\eta_B f''' + (1 + \eta_B) f'' + f' + ff'' - f'^2 + \gamma(\gamma - 1) = 0, \quad (4.1)$$

から出発する。 $f$  は Bellamy-Knights の独立変数  $\eta_B \equiv r^2/4\tau$  ( $\tau \equiv \nu t$ ) の関数で  $\nu$  は動粘性係数、 $t$  は時間変数、 $r$  は中心軸からの距離である。また、プライムは独立変数に関する微分を表す。関数  $f$  は、動径方向の速度  $v_r$ 、および軸方向の速度  $v_z$  と次のように関係付けられている：

$$v_r = -\frac{2\nu}{r} f(\eta_B), \quad v_z = \frac{\nu z}{\tau} f'(\eta_B) \quad (4.2)$$

$f$  が分かると、方位角成分  $v_\theta$  は  $f$  を含む関数の積分として簡単に与えられる (Bellamy-Knights 1971, Takahashi 2022a)。Bellamy-Knights (1971) は、式 (4.1) を以下の条件

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = A, \quad f''(0) = (A - \gamma)(A + \gamma - 1) \quad (4.3)$$

<sup>7</sup> Kudos (growkudos.com) 上の AIP Showcase で紹介されている：<https://www.growkudos.com/publication/s/10.1063%25252F5.0106368/reader>

の下で解き，2つの厳密解

$$f_1 = \gamma \eta_B, \quad (4.4a)$$

$$f_2 = \gamma \eta_B - \frac{3\gamma}{1+\gamma} (1 - e^{-(1+\gamma)\eta_B}). \quad (4.4b)$$

とその他の数値解を得た。正と負の  $\gamma$  は，動径方向無限遠で流入と流出する流れを表す。

ここで， $\kappa$  を任意の正の定数として次のように変数変換する：

$$\eta^2 \equiv 4\eta_B / \kappa = r^2 / \kappa \tau \quad (4.5a)$$

$$f(\eta) = -\frac{1}{2} \int_0^\eta x(\eta) \eta d\eta \quad (4.5b)$$

式 (4.5) を (4.1) に代入して，Bellamy-Knights 方程式の微積分方程式版

$$x'' + x^2 + \kappa x - 4k^2 = -\left( \frac{\kappa\eta}{2} + \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta} \int_0^\eta x\eta d\eta \right) x' \quad (4.6)$$

を得る。プライムは  $\eta$  に関する微分を表す。 $k$  は圧力項に起因するもので

$$k^2 \equiv \gamma(\gamma-1)\kappa^2 / 4 \quad (4.7)$$

によって  $\gamma$  と関係づけられている。式 (4.6) を Bellamy-Knights 方程式から導いたが，これを流れの軸方向成分の NS 方程式に連続の式を加味して直ちに導くこともできる。

式 (4.6) は，仮りに  $\eta$  を時間と見なすと，ポテンシャルから導かれる保存力と非保存力の下で 1 次元運動する粒子の運動を表すことは明らかである。特に， $\kappa = 0$  とすると，式 (4.6) は Burgers と Sullivan の解とそれらをつなぐ一連の定常解を与える方程式に一致する (Takahashi 2014, 2022a, 2022b)。 $\kappa \neq 0$  の場合，ポテンシャルは

$$x_\pm \equiv \frac{1}{2} \left( -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 16k^2} \right) \quad (4.8)$$

に極小極大を持つ。 $x_+$  はアトラクター， $x_-$  はリペラーで，この保存力ポテンシャルの形から運動の可能な様態を比較的直感的に予測することができるという利点がある (Takahashi 2022a の Fig. 5 を参照)。例えば，初めに  $x$  が大きすぎると，質点はポテンシャルの斜面を下った後に極大点を乗り越えてポテンシャルの坂を限りなく下っていくだろう。これはいわゆる‘爆発’する解に相当する。

## V 渦解と境界条件

$\eta = 0$  の近くで (4.6) の解は次のように表される (Takahashi 2014, 2022a, b)：

$$\begin{aligned} x(\eta) &= \sum_{l,l'=0} a_{l,l'} (\ln \eta)^{l'} \eta^l \\ &= a_{0,0} + a_{1,0} \ln \eta + a_{0,2} \eta^2 + a_{1,2} \eta^2 \ln \eta + a_{2,2} \eta^2 (\ln \eta)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

正則解は  $a_{1,0} = 0$  である。高次項の展開係数は次のように  $a_{0,0}, a_{1,0}$  と関係している：

$$\begin{aligned} a_{0,2} &= -\frac{1}{4} a_{0,0}^2 - \frac{9}{16} a_{1,0}^2 + \frac{5}{8} a_{0,0} a_{1,0} - \frac{\kappa}{4} a_{0,0} + \frac{\kappa}{8} a_{1,0} + k^2 \\ a_{1,2} &= \frac{5}{8} a_{1,0}^2 - \frac{1}{2} a_{0,0} a_{1,0} - \frac{\kappa}{4} a_{1,0} \\ a_{2,2} &= -\frac{1}{4} a_{1,0}^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$(a_{0,0}, a_{1,0})$  を与えるとすべての係数が決まるので、今後この組を境界条件または初期条件と呼ぶことにする。Bellamy-Knights の厳密解は  $(a_{0,0}, a_{1,0}) = (x_-, 0)$  と  $(-2x_-, 0)$  として、Burgers と Sullivan の解はさらに  $\kappa = 0$  として得られる。数値解を探す実際問題上は、(5.2) を厳密に守る必要はない。初期値を  $\eta = 0$  で設定することはできないことと、 $\eta = 0$  の近くでは、微分方程式の真の解の周りのすべての Lyapunov 指数が負で、 $\eta$  が増えるとともに急速に真の解に近づくことが期待できるからである。

面白いのは、保存力のみならず、保存力と非保存力が協同して動径方向にほぼ一定の波長、一つは  $\lambda_S = 2\pi(\kappa^2 + 16k^2)^{-1/4}$ 、もう一つは  $\lambda_L = 2\pi/\sqrt{3\kappa}$  で近似的に調和振動する 2 種の解があることである。前者は  $x = x_+$  のまわりの、振幅がいくらでも小さくなりうる小さい振動、後者は  $x = \kappa$  のまわりの振幅がほぼ一定の大きい振動である。この振動の組み合わせ方が解の型を決定する。さらに、振動は必ず有限の距離で終わるので、この距離で渦の半径を定義できる。

初期条件をかってに選ぶと、解は遠方で指数関数を超える速さ、具体的には  $x \sim e^{\beta \eta^2}$  ( $\beta$  は正の定数) で発散する (Takahashi 2022b)。これを避けるためには、初期条件を注意深く選ばなければならない。Bellamy-Knights (1970, 1971) は初期条件を  $\gamma < 1/2$  の範囲に限った。このとき、アトラクター  $x_+$  の吸引域は広く、数値解を探しやすい。これに対し、Takahashi (2022a, b) は、大きい  $\gamma$  に対する、遠方で流入する解、すなわちリペラー  $x_-$  に近づく解と解が存在するための初期条件の範囲を調べた。図 1 に特異解 ( $a_{1,0} \neq 0$ ) の例を示す。この例以下の全ての数値計算で  $2k = 1$  としている。図 1 では、大きい振動を見ることができる。

正則渦解 ( $a_{1,0} = 0$ ) を与える  $(\kappa, a_{0,0})$  のうち実際に計算されたものを図 2 に示す。点がいくつかの明瞭な系列をつくっているのは、系列が同じ型の解の並びであることを表している。 $\kappa = 0$  では  $a_{0,0} = -1$  (Burgers) と  $2$  (Sullivan) のみが解であるが、 $\kappa$  が正になると、これまで見落とされていた無限の解が現れる。この意味で、 $\kappa = 0$  が臨界点である。図 2 に示したのは、可能な初期条件のほんの一部である。

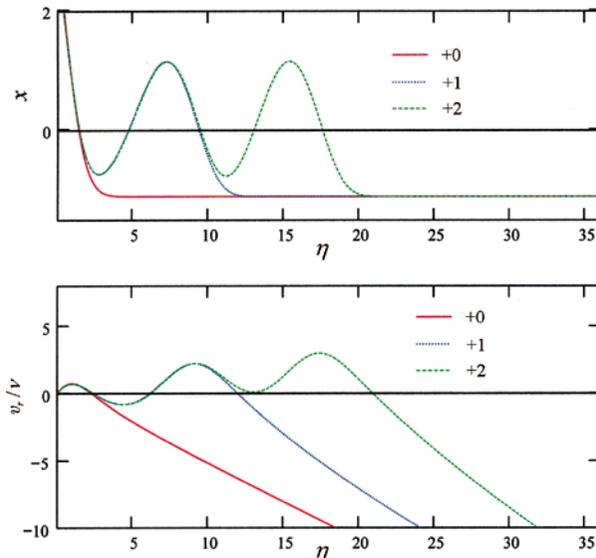


図 1.  $\kappa = 0.2$ ,  $2k = 1$  のときの解の例。上:  $x$ , 下:  $v_r/v$ 。時間は  $\kappa\tau = 1$ 。初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  は実線 (+0) : (1.838770596, -0.5), 点線 (+1) : (1.838747393, -0.5), 破線 (+2) : (1.838747584, -0.5)。数値計算では初期条件は  $\eta = \eta_0 = 0.002$  で課した。ここで  $+i$  の  $+$  は原点付近での  $x$  の符号,  $i = 0, 1, 2$  は大きい振動の数。

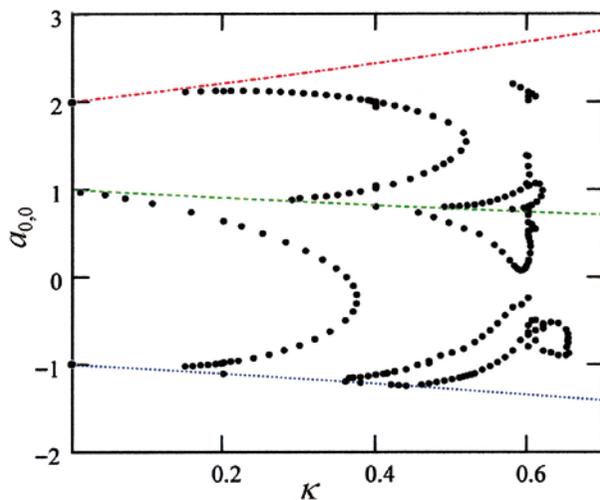


図 2. 正則渦解を与える  $(\kappa, a_{0,0})$ 。  $2k = 1$  として実際に数値計算されたものを点で表している。Takahashi (2022b) より。

$\kappa = 0$  (定常解) および  $\kappa = 0.2$  と固定したときの可能な初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  を図 3 に示した。 $a_{1,0} = 0$  の線に一般に知られている正則解が分布する。上に述べたように,  $\kappa \neq 0$  のときは, 正則解は無限に存在する。セルの数に上限があるかどうかは分かっていない。原点で対数発散する特異解は, 一端が  $(x_+, 0)$  で他端が無限遠に伸びた螺旋状の連続曲線を形成する。こ

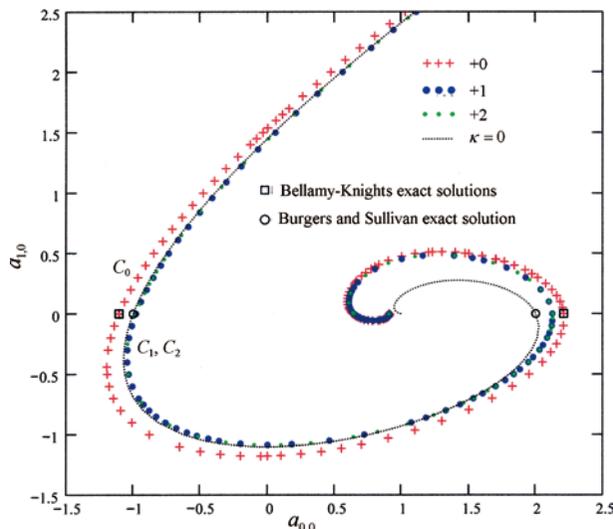


図 3.  $\kappa = 0, 0.2$  かつ  $2k = 1$  のときの初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  の分布。初期条件の 3 つの系列  $C_0, C_1, C_2$  が認められる。(この系列を本文では枝と呼んだ。) これらの系列はそれぞれ解の型  $\pm 0$  (+),  $\pm 1$  (大きい点),  $\pm 2$  (小さい点) に対応する。点線は定常渦 ( $\kappa = 0$ ) の初期条件。2 つの、四角で囲まれた + は Bellamy-Knights の 2 つの厳密解に対応する。円で囲まれた 2 つの点  $(1, 0)$  と  $(2, 0)$  は Burgers と Sullivan の定常解に対応する (Takahashi 2022b を一部改変)。

の連続した曲線を枝 branch と呼ぶことにする。 $(x_+, 0)$  近辺を拡大したものを図 4 に示した。

$\kappa = 0.4$  と固定したときの可能な初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  を、 $\kappa = 0$  (定常解) の場合とともに図 5 に示した。原点で対数発散する特異解は、この空間の無限遠に開いた連続曲線か、一端が  $(x_+, 0)$  で他端が無限遠に伸びた螺旋状の連続曲線を形成する。

図 3, 4, 5 から、全ての枝は、その端点が  $(x_+, 0)$  か  $(\infty, \infty)$  にあるということに注目する。これを集合点 coalescent point と呼ぶことにする。 $(x_+, 0)$  を  $P_E$  で表す。さらに、枝が無限に存在することから、一つの枝で結ばれる離れた 2 つの正則解の組が無限に存在することが結論される。Burgers 解と Sullivan 解や Bellamy-Knights の 2 つの厳密解はそのような組をつくる。一つの枝上の無限小だけ離れている 2 つの解はエネルギー差が無限小と考えられるので、上記の同じ組に属する 2 つの正則解は、物理的には連続的に変形して相互に移りうるであろう<sup>8</sup>。正則解と特異解は、物理的には同等に扱うことができるので、任意の解は一つの枝上で連続的に変形遷移することが予想される。

図では表されないが、一つの枝はその近くに多くの、あるいは無限の枝を伴っている。こ

<sup>8</sup> ここまでで取り上げた単純渦解は、速度が無限速で発散するので、この記述は厳密には意味が無い。しかし、空間を限ればエネルギーは有限で、その範囲でのエネルギー差は有限である。これは、単純渦を、有限空間内で現実の渦の近似と見なすことに相当する。

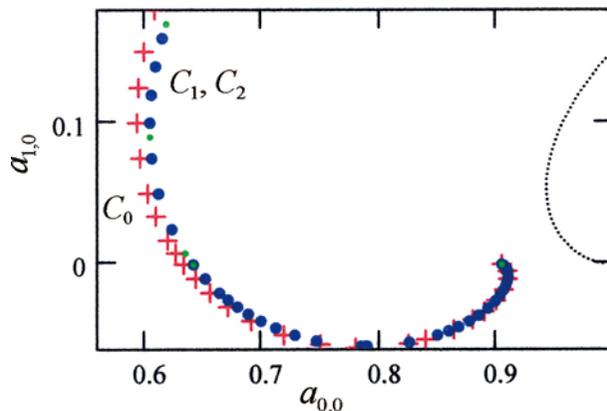


図4.  $\kappa = 0.2$  のときの  $P_E = (x_+, 0)$  付近の拡大図。  $x_+ = 0.90499$ 。

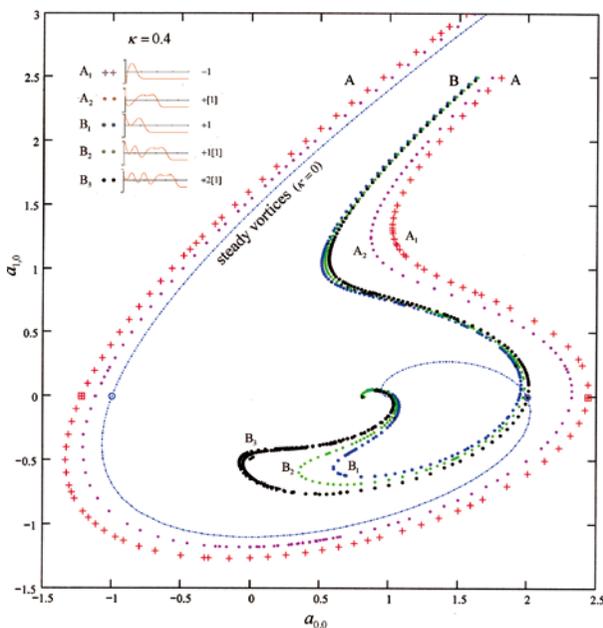


図5.  $\kappa = 0.4$  (+および点) のときの可能な初期条件。一点鎖線は  $\kappa = 0$ 。左上に、解  $x$  の典型的な型を示した。同じ型の解は1つの滑らかな系列—枝—を構成する。○は Burgers 解と Sullivan 解, □は Bellamy-Knights の2つの厳密解。  $2k = 1$ 。Takahashi (2022b) より。

これは、 $x$  が擬似的なサイクル数が有限の周期解—擬周期解—を持つこと、サイクル数が多い解の場合、初期条件の差を任意に小さくすることができることから証明できる (Takahashi 2022b)。その結果、互いに異なる型の解を与える初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  の不連続な系列が存在して、かつそれはある点—集積点—に収束する。集積点の連続な系列は1つの曲線 (集積枝) をつくる。そのような曲線は無数にあるが、その一つを  $C_\infty$  と書くことにする。枝、集積点、

集合点の関係を模式的に図 6 に示す。図 6 で、黒点は、解  $x$  のサイクル数が 1 ずつ増えていく初期条件の列で、白点で示した集積点を持つ。集積点に近づくにしながら、初期条件の差は限りなく小さくなるが、解は擬調和振動で構成されるので、解相互の差は常に有限である。  $C_\infty$  その他の集積枝上の任意の点  $P$  の近傍  $U_P$  は無限の初期条件を含む。同様に、  $P_E$  の任意の近傍  $U_E$  は無限に多くの初期条件を含む。図から、  $U_E$  内の初期条件の数（無限大）は、  $U_P$  内の初期条件の数（無限大）より大きいであろう（枝が無限にあって、それぞれが異なる  $C_\infty$  を持つ場合、  $U_P$  内の初期条件と  $U_E$  内の初期条件は 1 対 1 の対応が見つからない）。

以上に述べた解の性質—  $\eta = 0$  で正則か特異的かによらない—により、我々が探す小さい  $\kappa$  あるいは大きい  $\gamma$  の解は一般に初期条件に極端に敏感である。計算あるいは測定の誤差をなくす事はできないので、一つの初期条件が一つの解を与えるという解の一意性は実質的に補償されないことになる。とくに集積点の近くでは、初期条件を同じにしても、計算のアルゴリズムが異なれば異なった結果が得られる可能性が高くなるので、結果のチェックには注意を要する。Bellamy-Knights が小さい  $\gamma$  の解に探索を限ったのはこのためであったと思われる。

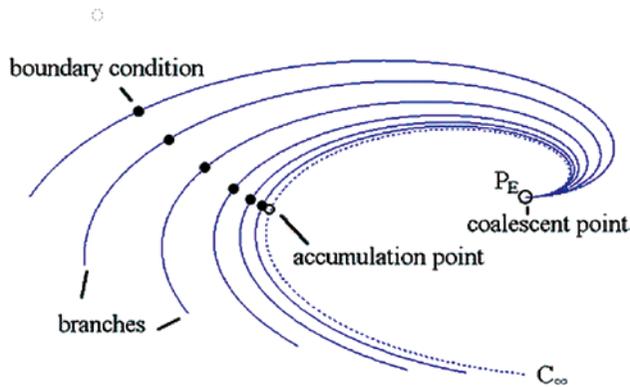


図 6. 枝, 集積点, 集合点と  $C_\infty$  の模式図。

## VI. コーシー問題との観測論的関連

偏微分方程式である NS 方程式のコーシー問題に解があるかは、初期条件に対する解の一意性まで含めて分かっていない<sup>9</sup>。さらに詳しく述べるならば、初期条件を連続に変えたときに、解は全領域で一様連続に変わるかという問題にまだ十分に確かな答えが得られていない

<sup>9</sup> 常微分方程式については、方程式が正則なら解は一意的である。非正則な場合、例えば  $t$  の全領域で実数の  $y$  の 1 階常微分方程式  $dy/dt=y^{2/3}$  では、  $y(0)=0$  の初期条件に対し  $y(t)=0$  と  $y(t)=t^3/27$  の 2 つの解がある。

ということである。有限の空間内での値をある仕方で与えると、有限の時間内に場が発散する場合があることは知られてはいる (Moffat 2000, Drazin and Riley 2007)。しかし、それらの解は全エネルギーが無限大であるばかりでなく局所的にも無限大になるもので、実験室内の渦や自然界の竜巻、台風などとは本質的に別種のものである。

Bellamy-Knights (1970, 1971) の解は全エネルギーは発散するが、局所的には有限である。また Serrin (1972), Takahashi (2022a, b) の解は、局所的に発散することがあるが、この発散は観測量の発散をもたらさない。したがって、これらの解を元にして現実の渦運動にさらに接近できる余地は残されていると思われる。これについては第2部で述べることにして、ここでは、前節で得られた結果の観測論的意味に触れておく。

我々は、異なる型に属する非定常渦解の初期条件  $(a_{0,0}, a_{1,0})$  の互いに異なる無限の系列があって、 $\kappa$  を固定すると、それが無限に多くの集積点と集合点  $P_E$  を有することを知った。すなわち、任意に近い2つの初期条件が有限の差がある2つの異なる渦解を生ずるのである。連続3D空間で起きることがこの現象の特徴である<sup>10</sup>。

実数値の観測あるいは数値計算は常に有限の誤差を伴う。集積点や集合点近辺で誤差をどんなに小さく初期条件を定めても、その誤差の範囲内には数学的に無限に多くの異なる物理的初期条件が含まれ、相互に有限の違いがある無限に多くの渦解を与える。観測上は、“同一の”初期条件から無限の異なる種類の渦が生まれるかのように見えることになる。数値計算で言えば、例えば、初期条件を精度は“同じ”で計算方式—2進法か10進法か、四捨五入法によるか切り捨て法によるか—を変えると異なる渦解を得るということが起き得る。実験観察の正しさ、あるいは計算の正しさを、任意の精度で有限の時間内に確認することは不可能なのである。結局、原則論はさておき観測論的にはコーシー問題の答は否定的である。言い換えれば、流体に関する限り、“同一の”原因が同一の結果を生むとは限らないのである。

上の結論が、直ちに第I節で紹介したいいわゆるミレニアム問題の否定的な答になるかという、実はそうはならない。Bellamy-Knights (1970, 1971) および Takahashi (2022a, b) の渦解は、速度場が無限遠で距離に比例して発散し、従って全エネルギーも無限大になる。(Takahashi 2022a, b の解の対称軸上の対数発散は全エネルギーの発散の原因ではない。Serrin 1972 の渦も同様である。) エネルギーが無限であれば何が起きてても不思議ではないと言われればそれまでである。しかし、問題の答を探す上でのささやかなヒントにはなっていると考える。

<sup>10</sup> これは、水素原子のエネルギー固有値がゼロに限りなく近づく不連続な系列をつくり、かつ任意に近い異なる固有値の波動関数が有限の差を有することを思い出させる。古典力学では、境界がある2次元現象—膜や水面の振動など—で同様なことが起きることはよく知られている。水面上を歩く液滴も同類の興味深い現象である (Eddi 他 2012, Harris 他 2014, Perrard 他 2014)。

第 2 部で、エネルギー密度が有限の渦について論じる。

## 第 1 部 参考文献

[日本語文献]

木田重雄・柳瀬眞一郎 [KIDA Shigeo・YANASE Shinichiro] 1999 乱流力学 (朝倉書店)

Davidson P. A. 2016『乱流』第 2 版 (益田訳, 森北出版)

von Neumann, J. 1949 最近の乱流理論 (『数理物理学の方法』伊東編訳, ちくま学芸文庫 2013 所収)

[欧文文献]

Bellamy-Knights, P. G. 1970, An unsteady two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations, *J. Fluid Mech.* **41**, 673-687.

Bellamy-Knights, P. G. 1971, Unsteady multicellular viscous vortices, *J. Fluid Mech.* **50**, 1-16.

Block, J.R. and Yucker, H. 1989, Can you believe your eyes? (Brunnrt/Mazel Pub.), p 76.

Burgers, J. M. 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171-199.

Craik, A. D. 2009, Exact vortex solutions of the Navier-Stokes equations with axisymmetric strain and suction or injection, *J. Fluid Mech.*, **626**, 291-306.

Dierkes, D., Cheviakov, A. and Oberlack, M. 2020, New similarity reductions and exact solutions for helically symmetric viscous flows, *Phys. Fluids*, **32**, 053604.

Dombre, T., Frisch, U., Greene, J. M., Henon, M. Mehr, A. and Soward, A. M. 1986, Chaotic streamlines in the ABC flows, *J. Fluid Mech.*, **167**, 353-391.

Drazin, P. and Riley, N. 2006, The Navier-Stokes Equations A classification of flows and exact solutions, *London Math. Soc. Lecture Note Series* (Cambridge Univ. Press, London) No. 334.

Dugas, R. 1988, *A history of mechanics* (Dover, New York)

Dyck, N. J. and Straatman A. G. 2020, Exact solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations using the extended Beltrami method, *Mech. Matr. Eng. Pub.*, 011004.

Eddi, A., Moukhtar, J., Perrard, S., Fort, E. and Couder, Y. 2012, Level splitting at macroscopic scale, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 264503.

Ershkov, S.V. 2016, Non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations *Appl. Mathemat. and Comput.*, **274**, 611-614.

Ershkov, S.V., Giniyatullin, A.R. and Shamin, R.V. 2020, On a new type of non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations *J. of King Saud Univ. - Science*, **32**, 459-467.

Ershkov, S.V., Prosviryakov, E. Y., Burmasheva, N. V. and Christianto, V. 2021, Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations *Fluid Dyn. Research*, **53**, 044501.

Fiedler, B. H. 1994, The thermodynamic speed limit and its violation in axisymmetric numerical simulations of tornado-like vortices *Atmos. Ocean* **32**, 335-359.

Fridman, A. M. 2008, Prediction and discovery of extremely strong hydrodynamic instabilities due to a velocity jump : theory and experiments *Phys.-Usp.* **51**, 213-229.

Gromeka, I. 1881, Some cases of incompressible fluid motion *Scientific notes of the Kazan Univ.* 76-148.

Harris, D. M. and Bush, J. W. M. 2014, Droplets walking in a rotating frame : from quantized orbits to multimodal statistics, *J. Fluid Mech.* **739**, 444-464.

Hedenström, A. 2006, Vortex wakes of bird flight : old theory, new data and future prospects, *WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering*, **4**, 706-734.

Kambe, T. 1984, Axisymmetric vortex solution of Navier-Stokes equation, *J. Phys. Soc. Jpn*, **53**, 13-15.

- Kolmogorov, A. N. 1941, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for vary large Reynolds' numbers, *Doklady Akademiia Nauk SSSR*, **30**, 301-305.
- Kolomenskiy, D. and Moffatt, H. K. 2012, Similarity solutions for unsteady stagnation point flow, *J. Fluid Mech.*, **711**, 394-410.
- Moffat, H. K. 2000, The interaction of skewed vortex pairs : a model for blow-up of the Navier-Stokes equations, *J. Fluid Mech.* **409**, 51-68.
- Moffat, H. K. 2014, Helicity and singular structures in fluid, *PNAS*, **111**, 3663-3670.
- Oseen, C. W. 1911, Über Wirbelbewegung in einer reidenben Flüssigkeit, *Ark. Mat. Astron. Phys.* **7**, 14-29.
- Pandey, S. K. and Maurya, J. P. 2018, Exact solutions for unsteady axisymmetric vortex motions governing atmospheric vortices *Dyn. Atmospheres and Oceans* **83**, 111-121
- Perrard, S. Laboussse, M., Fort, E. and Couder, Y. 2014, Chaos driven by interfering memory *Phys. Rev. Lett.* **113**, 104101.
- Reynolds, O. 1883, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Phil. Trans.* **174** 935-982.
- Rott N. 1958, On the viscous core of a line vortex, *Z. Angew Math. Phys.* **9**, 543.
- Serrin, J. 1972, The swirling vortex, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **271**, 325-360.
- Shi, C. and Huang, Y. 1991, Some properties of three-dimensional Beltrami flows, *Acta Mech. Sinica*, **7**, 289-294.
- Sullivan, R. D. 1959, A two cell vortex solution of the Navier-Stokes equations *J. Aerosp. Sci.* **26** 767.
- Takahashi, K. 2014, Classification of the steady axisymmetric vortices, *Fac. Lib. Arts Rev.* (Tohoku Gakuin Univ.) **168**, 51 (2014). (Available at : [https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06\\_03.pdf](https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2014/pdf/no06_03.pdf), date last accessed December 20, 2021). Correction 2021 : *Fac. Lib. Arts Rev.* (Tohoku Gakuin Univ.) **188**, 280.
- Takahashi, K. 2015a, On the non-existence of steady vortex solution with boundary surface, *J. Human Informatics*, **20** 39-44. (Available at : [http://www.ipc.tohoku-gakuin.ac.jp/ghi/kenkyu-joyo/kiyou/ronbun/no20/no20\\_takahashi.pdf](http://www.ipc.tohoku-gakuin.ac.jp/ghi/kenkyu-joyo/kiyou/ronbun/no20/no20_takahashi.pdf))
- Takahashi, K. 2015b, Tanjun Uzu to Taifu, *Liber. Arts Rev.* (Tohoku Gakuin Univ. in Japanese) **171** 105-146. (Available at : [https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2015/pdf/no06\\_06.pdf](https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2015/pdf/no06_06.pdf))
- Takahashi, K. 2017, Thermal structure of steady vortices on the Earth-like and the Sun-like atmosphere *Liber. Arts Rev.* (Tohoku Gakuin Univ.) **176** 39-61. (Available at : [https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2017/pdf/no05\\_04.pdf](https://www.tohoku-gakuin.ac.jp/research/journal/bk2017/pdf/no05_04.pdf))
- Takahashi, K. 2022a, New unsteady axisymmetric vortex solutions and their sensitivity to boundary conditions *Liber. Arts Rev.* (Tohoku Gakuin Univ) **189** 63-73.
- Takahashi, K. 2022b, Three-dimensional unsteady axisymmetric vortex solutions to the Bellamy-Knights equation and the distribution of boundary conditions, *AIP Advances* **12**, 085324.
- Trkal, V. 1919, A remark on the hydrodynamics of viscous fluids *Cas. Pst. Mat, Fys* **4** : 302-311.
- Tropea, C. and Bleckmann, H. (eds.) 2012, Nature-Inspired Fluid Mechanics : Results of the DFG Priority Programme 1207 *Note on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design* **119** Springer).
- Wang, C. Y. 1991, Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 159-177.

(たかはし こういち 東北学院大学 名誉教授)



図 7.