

# 強磁場による荷電ベクトル場不安定と カオスパターン

## II 散逸系

高 橋 光 一

強磁場中の荷電ベクトル場は、摂動論的な真空の不安定の原因となり、磁場とともに弦状の構造を自発的に形成する。保存系の場合、その運動は（準）周期的かカオス的で、フラクタル構造をも合わせ持つ。ベクトル場のエネルギーが大きいときは電弱相互作用による場の減衰を通して軽い粒子の生成が可能で、このことにより散逸効果が生じる。電弱標準理論と強磁場摂動法に基づいてこの散逸効果を絶対零度において（すなわち有限温度効果を入れずに）定量的に見積もり、場の運動が保存系の場合からどのように変化するかを調べる。この種の現象は、宇宙誕生後約  $10^{-10}$  秒後における放射とニュートリノおよび反ニュートリノの生成に寄与することが示される。

### 1. 序論

誕生後  $10^{-36} \sim 10^{-4}$  秒の宇宙初期では、非常に強い磁場が生成されたかもしれない (Savvidy 1977; Matinyan, Savvidy 1978; Enqvist, Olesen 1994)。十分に強い磁場の中では、磁場と磁気モーメントを通して相互作用するベクトル場は真空の不安定を引き起こす。その結果、静的には磁場と W 場による弦 — 電弱弦と呼ぶことにする — の結晶状の配列がエネルギー的に安定な状態として実現すると考えられる (Skalozub 1983; Sogut, Havare, Acikgoz 2002; Skalozub 1985; Ambjørn, Olesen 1989)。他方、エネルギーの高い状態から始めてその時間発展を見ると、ベクトル場と磁場はしばしば非常に複雑な動的振る舞いを示す (Takahashi 2010)。エネルギーが高い状態は、相転移時に系がしばらく偽の真空上に置かれることで実現するので、後者の場合は宇宙の初期の歴史と直接関連すると期待できる。

ベクトル場は、大統一理論 (GUT) であれば電弱統一理論であればより軽いフェルミ粒子と結合し、真空中では直ちに崩壊する。話を電弱統一理論に限れば、ここでの荷電ベクトル場は質量  $m_w \sim 80$  GeV の W ボソンであり、それはクォーク、レプトン、ニュートリノとそれらの反粒子に崩壊する。(現在の宇宙の真空中では、 $W^-$  はほぼ 10 パーセントの確率で電子-

反ニュートリノ対, ミュー-反ニュートリノ対, タウ-反ニュートリノ対に, また約 70 パーセントの確率でハドロン (クォークや反クォークからなる粒子) に壊れる (Particle Data Group 2008)). このことは, W ボソンが質量殻上のレプトンやクォークと結合することで, 図 1 の Feynman 図に示された自己エネルギーが虚部を持ちうることを意味する。強磁場中でカオス的に変動するベクトル場不安定モードには, 質量殻上のレプトンやクォークを生成するに足る高エネルギー成分がある (Takahashi 2010) ので, 相転移の進行過程では不安定 W 場はレプトン-反ニュートリノ対 (または反レプトン-ニュートリノ対, またはクォーク-反クォーク対) を生成し, 自身は減衰するであろう。従って, 前稿 (Takahashi 2010) で導いた W 場の古典的運動方程式は, 現実的には崩壊による減衰を表す散逸項を含むように変更されなければならない。

本稿では, 高いエネルギーのベクトル場がレプトンやクォークとの結合を通してエネル

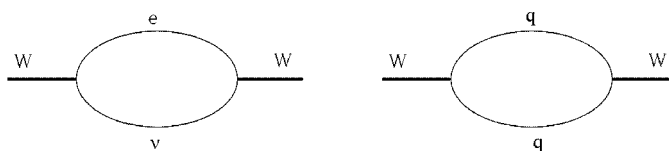


図 1 W ボソンの 2 次の自己エネルギーを表す Feynman 図。(a): レプトン・反レプトン中間状態, (b): クォーク・反クォーク中間状態。

ギーを散逸させる時に, 系がどのように振る舞うかを調べる。考慮する Feynman 図は図 1 に示してある。

通常の摂動法との違いは, 荷電粒子が強磁場下で運動するという点である。伝搬関数も, この点を考慮して構成しなければならない。そのもととなる波動関数の形は多くの研究者によって見つけられているが, ここでは Takahashi (2006) で与えられた表示形式を用いる。それは, 対称ゲージ (たとえば Ezawa 2000 を見よ)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0), A^0 = 0 \quad (1.1)$$

での調和振動子演算子による調和関数として与えられる。それらの積の和として表される伝搬関数は, 計算上他の表示よりも扱いやすいという利点がある。第 2 節と第 3 節で, それぞれ図 1 (a) と 1 (b) の自己エネルギー補正の虚部がこの表示形式の下でどのように計算されるかを見る。第 4 節で, 第 2 節と第 3 節の結果を取り入れた散逸力学系を構成しその数値解を求める。

## 2. 不安定モードとレプトンとの結合

はじめに、W の不安定モードとレプトンとの相互作用を特定しておく。レプトンとして電子と電子ニュートリノを考える。相互作用ラグランジアンは

$$L^{(e)} = \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-] \quad (2.1)$$

で与えられる (Weinberg 1967, Salam 1968)。 $e$  は電子場、 $\nu$  は電子ニュートリノ場、 $W_\mu^\pm$  は  $W^\pm$  ボゾン場である。結合定数  $g$  は Weinberg 角  $\theta_w$  によって電子の電荷  $-e$  と  $g=e/\sin\theta_w$  の関係にある。強い磁場  $\mathbf{B}=(0, 0, B_z)$  のもとでは、磁場に直交する成分 (横成分) に不安定モード  $-\phi$  で表す  $-$  が現れる。我々は、 $\phi$  を次のように定義する：

$$W_1^+ = \frac{1}{2}(W_s + \phi), \quad W_2^+ = \frac{1}{2i}(W_s - \phi) \quad (2.2)$$

ここで  $W_s$  は安定モードである。または

$$\phi = W_1^+ - iW_2^+ \quad (2.3)$$

である。

Dirac 行列のカイラル表現

$$r = \begin{pmatrix} -\sigma \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

を用いると、(2.1) の  $\gamma^1 W_1^+ + \gamma^2 W_2^+ = \frac{1}{2}(\gamma^1 - i\gamma^2)W_s + \frac{1}{2}(\gamma^1 + i\gamma^2)\phi$  に現れる Dirac 行列の組み合わせは

$$\gamma_- \equiv \frac{1}{2}(\gamma^1 - i\gamma^2)L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5a)$$

$$\gamma_+ \equiv \frac{1}{2}(\gamma^1 + i\gamma^2)L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5b)$$

( $L=(1-\gamma_5)/2$ ) という形を取る。明示的に書かれていない要素はすべて 0 である。

ここで定義した  $\gamma_\pm$  には次の性質がある。

$$\gamma_-\gamma^0\gamma_+=\gamma_-\gamma^3\gamma_+=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv C \quad (2.6a)$$

$$\gamma_-M_{diag}\gamma_+=\gamma_-M_{\overline{diag}}\gamma_+=0 \quad (2.6b)$$

(2.6b) で、 $M_{diag}$  は任意の対角行列、 $M_{\overline{diag}}$  は任意の

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

の形の行列である。この  $\gamma_{\pm}$  を用いると、横成分の相互作用は

$$\begin{aligned} L_{\perp} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{\mu=1}^2 [\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)eW_{\mu}^+ + \bar{e}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu W_{\mu}^-] \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}(\gamma_0 - W_3 + \gamma_1\phi)e + \bar{e}(\gamma_0 W_3^* + \gamma_1\phi^*)\nu] \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。

### 3. 不安定モードのレプトンによる真空偏極

ここでは、不安定モード  $\phi$  の力学系における散逸効果を見るために、 $\phi$  のレプトンによる真空偏極  $\Pi^{(i)}$  の虚部を摂動の 2 次のオーダーで求める。それが  $\phi$  の減衰率を与える。図 1 において、初期状態を  $W^-$  とする。すると (2.7) より電子とニュートリノからの寄与は

$$\begin{aligned} TLi\Pi^{(e)} &= -\text{Tr} \int d^4x d^4x' \frac{ig}{\sqrt{2}} \phi(x) \gamma_+ iS_e(x, x') \frac{ig}{\sqrt{2}} \phi^*(x') \gamma_- iS_{\nu}(x', x) \\ &= -\frac{g^2}{2} \text{Tr} \int d^4x d^4x' \gamma_+ \phi(x) S_e(x, x') \gamma_- \phi^*(x') S_{\nu}(x', x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

と表わされる。系の時間長と  $z$ -方向の長さをそれぞれ  $T, L$  とした。一様磁場  $\mathbf{B}$  のもとでの電子とニュートリノの伝搬関数  $S_e(x, x')$ 、 $S_{\nu}(x', x)$  は

$$S_e(x, x') = \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{p}^2 - 2eBn_a - m_e^2 + i\epsilon} \left( \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + \sqrt{2eBn_a} \gamma^1 + m_e \right)_{\mathbf{n}, x, x'}^{-1} \quad (3.2a)$$

$$S_{\nu}(x', x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq\cdot(x'-x)}}{q^2 - m_{\nu}^2 + i\epsilon} (\mathbf{q} + m_{\nu}) \quad (3.2b)$$

で与えられる。 $\mathbf{n}=(n_a, n_b)$  は 0 以上の整数の組を表す。括弧の右上の指標  $-1$  は、 $e$  を単位としてはかった電荷  $-1$  の粒子に対する  $4 \times 4$  行列表示を用いることを意味する。これにつ

いては補足 A を参照のこと。

問題は、いま考えている系では磁場は空間的にも時間的にも一様ではないということである。Takahashi 2010 によれば、磁場弦の中心部分では磁場は強く無限遠で減少して一様になる。また、中心部分の磁場は時間的に  $O(m_w^2/e)$  程度変動する。そのような変動する外部磁場の影響で、一般には伝搬関数も図 2 によって補正される。しかし、磁場が非常に強く、荷電粒子は最低 Landau レベル状態のみが物理過程に寄与する場合は、粒子の内線・外線とも状態の空間波動関数は空間反転対称であるので、空間反転非対称なベクトルポテンシャル (1.1) とは結合しない。われわれは  $e, 1/eB$  の最低次のオーダーの寄与のみを考えるので、荷電粒子は、弦が形成される以前の一様磁場のもとで伝搬するという近似を用いることができる。

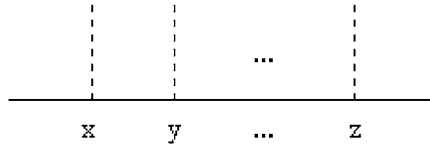


図 2 伝搬関数の外部磁場による補正

(2.6) より

$$\gamma_-(\boldsymbol{q} + m_\nu)\gamma_+ = (q^0 - q_z)C \quad (3.3)$$

となるので、ニュートリノ伝搬関数については

$$\gamma_- S_\nu(x', x)\gamma_+ = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^0 - q_z}{q^2 - m_\nu^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x' - x)} C \quad (3.4)$$

を得る。したがって、 $\Pi^{(e)}$  の計算では、電子伝搬関数の分子に現れる行列と C との積を求めればよい。それは簡単に実行できて

$$\begin{aligned} \gamma_{n,x,x'}^0 C &= \begin{pmatrix} & |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & \\ & & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \\ & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \end{pmatrix} C \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^3 \mathbf{C} = \begin{pmatrix} & -|\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & \\ & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \\ |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \\ & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & & \end{pmatrix} \mathbf{C}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \end{pmatrix} \quad (3.5b)$$

となる。C は 2,4 成分のみが非ゼロであるが、 $\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^1$  は 4,2 成分を持たないので (3.2a) の  $\sqrt{2eBn_a}$  を含む項は Tr には寄与しない。

(3.1) のトレースを取ると次式を得る：

$$TLiH^{(e)} = -\frac{g^2}{2} \int d^4x d^4x' \phi(\mathbf{x}_\perp) d(x, x') \phi^*(\mathbf{x}_\perp') \quad (3.6)$$

ここで  $d(x, x')$  は次のように定義される：

$$d(x, x') \equiv \text{Tr} S_e(x, x') \gamma_- S_\nu(x', x) \gamma_+$$

$$= \text{Tr} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^2\tilde{p}}{(2\pi)^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\tilde{p}\cdot(x-x')}}{\tilde{p}^2 - 2eBn_a - m_e^2 + i\epsilon} \left( \tilde{\mathbf{p}} + \sqrt{2eBn_a} \gamma^1 + m_e \right)_{\mathbf{n},x,x'}^{-1}$$

$$\mathbf{C} \frac{q^0 - q_z}{q^2 - m_\nu^2 + i\epsilon} e^{-iq\cdot(x'-x)}$$

$$= \sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \int \frac{d^2\tilde{p}}{(2\pi)^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{p}^0 + \tilde{p}_z}{\tilde{p}^2 - 2eBn_a - m_e^2 + i\epsilon} \frac{q^0 - q_z}{q^2 - m_\nu^2 + i\epsilon}$$

$$e^{i(\tilde{p}-q)\cdot(\tilde{x}-\tilde{x}')} e^{iq_\perp\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})_\perp} \quad (3.7)$$

$\mathbf{x}_\perp = (x^1, x^2)$  は横座標である。(2.6b) より、分子の質量項は  $d^{(l)}(x, x')$  に寄与しない。初期状態の負電荷不安定モードを無次元振幅  $f$  を使って

$$\phi(x)^* = e^{-i\omega t} \sqrt{2} \frac{m_w}{e} f \sqrt{\frac{2\pi}{eB}} |\mathbf{m}, x\rangle \quad (3.8)$$

のように表す ( $\phi$  はプラス電荷の場として定義されていることに注意)。Takahashi (2010) によれば、不安定モードは、その実角振動数  $\omega$  が

$$\omega \lesssim m_w \sim \sqrt{eB} \quad (3.9)$$

のものが主要成分になる。(3.6) で、座標の縦成分  $\tilde{x}, \tilde{x}'$  に関する積分を先に実行すると

$$\begin{aligned}
 TLi\Pi^{(e)} &\equiv -\frac{g^2}{2} \int d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{x}'_\perp \int d^2\tilde{x} d^2\tilde{x}' \langle \mathbf{m}, x | d(x, x') | \mathbf{m}, x' \rangle \\
 &= -\frac{g^2}{2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(0) \left( \sqrt{2} \frac{m_W}{e} f \sqrt{\frac{2\pi}{eB}} \right)^2 \int d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{x}'_\perp \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{n}} \langle \mathbf{m}, x | e^{-i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} | \mathbf{n}, x \rangle \langle \mathbf{n}, x' | e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp} | \mathbf{m}, x' \rangle \frac{q^0 + \omega + q_z}{(q^0 + \omega)^2 - q_z^2 - 2eBn_a - m_e^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{q^0 - q_z}{q^2 - m_e^2 + i\epsilon} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

(3.10) で  $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(0) = TL$  である。したがって (3.10) の右辺の実部の符号を変えたものが  $TL\Pi^{(e)}$  の虚部を与える。また

$$\begin{aligned}
 &\int d^2\mathbf{x}'_\perp \langle \mathbf{n}, x' | e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp} | \mathbf{m}, x' \rangle = \langle \mathbf{n} | e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp} | \mathbf{m} \rangle \\
 &= e^{-|\eta\mathbf{q}_\perp|^2} w_{n_a, m_a}(\eta q_\perp) w_{n_b, m_b}(\eta q_\perp^*) , \quad q_\perp \equiv q_x + iq_y, \quad \eta \equiv 1/\sqrt{2eB} \tag{3.11a}
 \end{aligned}$$

$$w_{n', n}(z) \equiv \langle n' | e^{-z^* a^\dagger} e^{za} | n \rangle = \sqrt{\frac{n!}{n'!}} (-z^*)^{n'-n} L_n^{(n'-n)}(|z|^2) \tag{3.11b}$$

に注意する。この等式の最初の等号の右辺は、 $\mathbf{x}'_\perp$  を演算子とみなした時の、調和振動子状態  $|\mathbf{n}\rangle$  と  $|\mathbf{m}\rangle$  に関する  $e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp}$  の行列要素であるので、その値は梯子演算子の簡単な代数で求められる。 $L_n^{(a)}(x)$  はラゲールの多項式である。すると

$$\begin{aligned}
 TLi\Pi^{(e)} &= -TLg^2 \left( \frac{m_W f}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-2|\eta\mathbf{q}_\perp|^2} \sum_{n_b} W_{m, n_a}(|\eta\mathbf{q}_\perp|^2) \\
 &\quad \times \frac{q^0 + \omega + q_z}{(q^0 + \omega)^2 - q_z^2 - 2eBn_a - m_e^2 + i\epsilon} \frac{q^0 - q_z}{q^2 - m_e^2 + i\epsilon} \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

となる。ここで  $W_{m, n_a}(|z|^2)$  を

$$W_{m, n_a}(|z|^2) \equiv \sum_{n_b} w_{n_a, m_a}(z) w_{n_b, m_b}(z^*) w_{m_a, n_a}(-z) w_{m_b, n_b}(-z^*) \tag{3.13}$$

で定義した。後の便宜のためにこの関数の  $n_a=0$  の形を与えておく。

$$\begin{aligned}
 W_{m, 0}(|z|^2) &= \sum_{n_b} |w_{0, m_a}(z)|^2 |w_{n_b, m_b}(z^*)|^2 = \frac{(|z|)^{2m_a}}{m_a!} \sum_{n_b} |w_{n_b, m_b}(z^*)|^2 \\
 &= \frac{(|z|)^{2m_a}}{m_a!} e^{-|z|^2} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

虚部を求めるには、伝搬関数を実部と虚部に分けて、全体の虚部だけを知り出す方法もあるが、ここでは、途中までは振幅を解析的に求める方法を取る。(3.12) の  $q$ -積分を実行するために、よく知られた Feynman の方法で非積分関数を変形する：

$$\begin{aligned}
 i\Pi^{(e)} &= -g^2 \left( \frac{m_{wf}}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-2|\eta q_\perp|^2} \sum_{n_a} W_{m,n_a}(|\eta q_\perp|^2) \\
 &\quad \times \int_0^1 du \frac{(q^0 + \omega + q_z)(q^0 - q_z)}{[(q^0 + \omega)^2 u - q_z^2 u - 2eBn_a u - m_e^2 u + (q^2 - m_e^2)(1-u) + i\varepsilon]^2} \\
 &= -TLg^2 \left( \frac{m_{wf}}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-2|\eta q_\perp|^2} \sum_{n_a} W_{n_a}(|\eta q_\perp|^2) \\
 &\quad \times \int_0^1 du \frac{\tilde{q}^2 + (1-2u)\omega q_0 - \omega q_z - u(1-u)\omega^2}{[\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - u(2eBn_a + m_e^2) - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon]^2} \\
 &= -TLg^2 \left( \frac{m_{wf}}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-2|\eta q_\perp|^2} \sum_{n_a} W_{n_a}(|\eta q_\perp|^2) \int_0^1 du \\
 &\quad \times \int \frac{d^2\tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{q}^2 - u(1-u)\omega^2}{[\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - um_e^2 - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon]^2} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

二つ目の等号では、 $q^0 \rightarrow q^0 - \omega u$  の置き換えをしている。また、三つ目の等号では、 $q_0$  と  $q_z$  について奇数次の項を落としている。

次に、 $\tilde{q}$ -積分を次元正則化法（例えば Itzykson Zuber 1980）を用いて実行するのであるが、我々の関心は分極の虚数部にあるので、それに寄与する非積分関数の部分を次のようにして引き出す：

$$\begin{aligned}
 &\frac{\tilde{q}^2 - u(1-u)\omega^2}{[\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - u(2eBn_a + m_e^2) - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon]^2} \\
 &= \frac{1}{\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - u(2eBn_a + m_e^2) - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon} \\
 &\quad + \frac{(1-u)\mathbf{q}_\perp^2 - 2u(1-u)\omega^2 + um_e^2 + (1-u)m_e^2}{[\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - u(2eBn_a + m_e^2) - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon]^2} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

(3.16) の右辺第 1 項が、 $\tilde{q}$  積分で紫外発散を生じ、正則化によって  $\Pi^{(e)}$  に虚部を生じさせる部分である。(3.6), (3.7) より  $d_m$  の実部が  $\Pi^{(e)}$  の虚部に対応するのでそこだけを取り出すと、

$$\begin{aligned}
 \text{Im}\Pi^{(e)} &= \text{Re}g^2 \left( \frac{m_{wf}}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-2|\eta q_\perp|^2} \sum_{n_a} W_{m,n_a}(|\eta q_\perp|^2) \int_0^1 du \\
 &\quad \times \int \frac{d^2\tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\tilde{q}^2 - (1-u)\mathbf{q}_\perp^2 + u(1-u)\omega^2 - u(2eBn_a + m_e^2) - (1-u)m_e^2 + i\varepsilon} \\
 &= \text{Re}g^2 \left( \frac{m_{wf}}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \pi \int_0^\infty \frac{dt}{(2\pi)^2} e^{-2\eta^2 t} \sum_{n_a} W_{m,n_a}(\eta^2 t) \\
 &\quad \times \frac{i}{4\pi} \int_0^1 du \ln \left( (1-u)t - u(1-u)\omega^2 + u(2eBn_a + m_e^2) + (1-u)m_e^2 + i\varepsilon \right) \quad (3.17)
 \end{aligned}$$



最後の等号では  $2 \rightarrow \tilde{d}$  次元での次元正則化法を使い, また,  $|\mathbf{q}_\perp|^2 = s$  と積分変数の変換を行った。

(3.17) の右辺は,  $\ln$  の中

$$u(2eBn_a + m_e^2 - (1-u)\omega^2) + (1-u)(s + m_\nu^2) \quad (3.18)$$

が負のときに非ゼロとなる。これが可能なのは  $\omega^2 \sim m_w^2 \sim eB$  の領域では  $n_a = 0$ , すなわち電子が最低ランダウレベルにある場合のみである。以後, 議論を  $n_a = 0$  の場合に限ることにする。このとき (3.18) が負になるのは

$$0 < u_- < u < 1 \approx u_+ \quad (3.19a)$$

$$u_\pm = \frac{1}{2\omega^2} \left( s + \omega^2 - m_e^2 + m_\nu^2 \pm \sqrt{(s + \omega^2 - m_e^2 + m_\nu^2)^2 - 4\omega^2(s + m_\nu^2)} \right) \quad (3.19b)$$

においてであり,  $\ln$  関数部分から  $-i\pi$  の虚部が生じるので

$$\begin{aligned} \text{Im} \Pi^{(e)} &\approx g^2 \left( \frac{m_w f}{e} \right)^2 \frac{2\pi}{eB} \pi \int_0^\infty \frac{ds}{(2\pi)^2} e^{-2\eta^2 s} W_{m,0}(\eta^2 s) \frac{i}{4\pi} (-i)\pi(1-u_-) \\ &= g^2 \left( \frac{m_w f}{e} \right)^2 \frac{1}{8eB} \int_0^\infty ds \frac{(\eta^2 s)^{m_a}}{m_a!} e^{-\eta^2 s} (1-u_-) \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$1-u_- = \frac{1}{2} \left( 1+x-y \pm \sqrt{y^2 - 2(1+x)y + (1-x)^2} \right), \quad x = m_e^2/\omega^2, \quad y = (s + m_\nu^2)/\omega^2 \quad (3.20b)$$

(3.20a) では,  $W_{m,0}(|z|^2)$  に対する式 (3.14) を用いた。電子とニュートリノの質量は  $\omega$  に比べて非常に小さいので  $x \approx 0$ ,  $y \approx s/\omega^2$  と近似すると,

$$1-u_- \approx (1-s/\omega^2)\theta(\omega^2-s) \quad (3.21)$$

である。これを (3.20a) に代入して, (3.6), (3.10) より

$$\text{Im} \Pi^{(e)} \approx \left( \frac{m_w^2}{4e^2} \frac{2\pi}{h_0} \right) \frac{g^2}{2\pi} h_0 \frac{(\eta\omega)^{2m_a+2}}{m_a!} H^{(m_a)}(\eta^2\omega^2) f^2 \quad (3.22a)$$

$$H^{(m)}(x) \equiv \int_0^1 ds s^m (1-s) e^{-xs} \quad (3.22b)$$

ここで, 外部磁場を  $B_0$  として,  $h_0 \equiv eB_0/m_w^2$  である。(3.22a) 式の括弧の中は, Takahashi (2010) で与えた 0 次の摂動での有効作用の前にかかる因子と同じものである。レプトンからの全寄与は, レプトン質量が W ボゾンのそれに比べて非常に小さいことから, (3.22a) に単に世代数  $N_g = 3$  を掛けて得られる。図 3 に関数  $H^{(m)}(x)$  の  $x$  依存性を図示する。

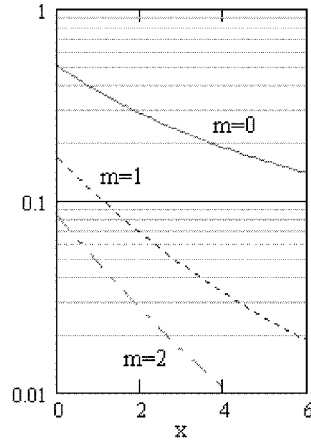


図3 関数  $H^{(m)}(x)$  の  $x$  依存性

#### 4. 不安定モードのクォークによる真空偏極

ここでは、図 1b に対応するクォークループからの寄与を求める。荷電カレント  $j^{+\mu} = \bar{u}_{Li}\gamma^\mu V_{ij}d_{Lj}$  ( $V_{ij}$  は小林益川行列 (Kobayashi and Maskawa 1972), 指標  $i, j$  は世代を表す) と W ボゾンとの相互作用は

$$L_q = \frac{g}{\sqrt{2}}(j^{+\mu}W_\mu + j^{-\mu}W_\mu^*) \quad (4.1)$$

である。u クォークと d クォークの伝搬関数  $S_u(x, x')$ ,  $S_d(x, x')$  とすると

$$\begin{aligned} TLi\Pi^{(q)} &= -\text{Tr} \int d^4x d^4x' \frac{i\tilde{g}}{\sqrt{2}} \phi(x) \gamma_+ iS_d(x, x') V^\dagger \frac{i\tilde{g}}{\sqrt{2}} \phi^*(x') \gamma_- iS_u(x', x) V \\ &= -\frac{\tilde{g}^2}{2} \text{Tr} \int d^4x d^4x' \gamma_+ \phi(x) S_d(x, x') V^\dagger \gamma_- \phi^*(x') S_u(x', x) V \end{aligned} \quad (4.2)$$

前節と同様に

$$\begin{aligned} d^{(q)}(x, x') &\equiv \text{Tr} S_d(x, x') V^\dagger \gamma_- S_u(x', x) \gamma_+ V \\ &= \text{Tr} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^2\tilde{p}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{p}\cdot(\tilde{x}-\tilde{x}')}}{\tilde{p}^2 - 2e_d Bn_a - M_d^2 + i\epsilon} \left( \tilde{p} + \sqrt{2e_d Bn_a} \gamma^1 + M_d \right)_{\mathbf{n}, x, x'}^{-1/3} V^\dagger \gamma_- \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{n}'} \int \frac{d^2\tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{q}\cdot(\tilde{x}'-\tilde{x})}}{\tilde{q}^2 - 2e_u Bn_{b'} - M_u^2 + i\epsilon} \left( \tilde{q} + \sqrt{2e_u Bn_{b'}} \gamma^1 + M_u \right)_{\mathbf{n}', x', x}^{+2/3} V \gamma_+ \end{aligned} \quad (4.3)$$

により、クォークループの  $d$ -関数を定義する。カレントクォークの  $3 \times 3$  質量行列は  $M_d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$ ,  $M_u = \text{diag}(m_u, m_c, m_t)$  の非ゼロ成分を持つ。 $e_d \equiv e/3$  および  $e_u \equiv 2e/3$  はそれぞれ  $d$  クォークと  $u$  クォークの電荷の絶対値である。括弧の右上の指標  $-1/3$  と  $2/3$  は、 $e$  を単位としてそれぞれ  $-1/3$  電荷と  $+2/3$  電荷の粒子に対する  $4 \times 4$  行列表示を用いることを意味する。これについては補足 A と B を参照せよ。前節同様、分子の

質量項は  $d^{(q)}(x, x')$  に寄与しない。(2.6b) より  $\gamma^1$  項からの寄与もないので

$$d^{(q)}(x, x') = \text{Tr} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^2 \tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{q} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}')}}{\tilde{p}^2 - 2e_d B n_a - M_d^2 + i\epsilon} (\tilde{q})_{\mathbf{n}, x, x'}^{-1/3} V^\dagger \gamma_- \\ \times \sum_{\mathbf{n}'} \int \frac{d^2 \tilde{q}'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{q}' \cdot (\tilde{x}' - \tilde{x})}}{\tilde{q}'^2 - 2e_u B n_{b'} - M_u^2 + i\epsilon} (\tilde{q}')_{\mathbf{n}', x', x}^{+2/3} V \gamma_+ \quad (4.4)$$

となるが、(2.6a) と同様に  $\gamma$ -行列のトレースについては

$$\gamma_- (\gamma_{\mathbf{n}, x, x'}^0)^+ \gamma_+ = \gamma_- (\gamma_{\mathbf{n}, x, x'}^3)^+ \gamma_+ = |\mathbf{n}, x\rangle \langle \mathbf{n}, x'| \text{C} \quad (4.5a)$$

$$\text{tr} \left[ (\gamma_{\mathbf{n}, x, x'}^0)^- \text{C} \right] = -\text{tr} \left[ (\gamma_{\mathbf{n}, x, x'}^3)^- \text{C} \right] = |\mathbf{n}, x\rangle \langle \mathbf{n}, x'| \quad (4.5b)$$

が成り立つので

$$d^{(q)}(x, x') = \text{tr} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^2 \tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{q} \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}')} (q^0 + q_z)}{\tilde{q}^2 - 2e_d B n_a - M_d^2 + i\epsilon} |\mathbf{n}, x\rangle \langle \mathbf{n}, x'| V^\dagger \\ \times \sum_{\mathbf{n}'} \int \frac{d^2 \tilde{q}'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\tilde{q}' \cdot (\tilde{x}' - \tilde{x})} (q^0 - q_z)}{\tilde{q}'^2 - 2e_u B n_{b'} - M_u^2 + i\epsilon} |\mathbf{n}', x'\rangle \langle \mathbf{n}', x| V \quad (4.6)$$

ここでの  $\text{tr}$  は世代の指標についてのトレースである。

$iII^{(q)}$  を求めるには、初期状態の負電荷不安定モードの状態関数 (3.8) で (4.6) を挟み、必要な積分を実行すればよい。

$$TLiII^{(q)} = -\frac{g^2}{2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f) \frac{4\pi}{eB} \left( \frac{m_W f}{e} \right)^2 \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \int d\mathbf{x}_\perp |\langle \mathbf{n}, x \| \mathbf{n}', x \rangle \langle \mathbf{m}, x \rangle|^2 \\ \times \text{tr} \int \frac{d^2 \tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{q^0 + q_z}{\tilde{q}^2 - 2e_d B n_a - M_d^2 + i\epsilon} V^\dagger \frac{q^0 - \omega - q_z}{(q^0 - \omega)^2 - q_z^2 - 2e_u B n_{b'} - M_u^2 + i\epsilon} V \quad (4.7)$$

$|\mathbf{m}, x\rangle$ ,  $|\mathbf{n}, x\rangle$ ,  $|\mathbf{n}', x\rangle$  はそれぞれ電荷  $-1$ ,  $-1/3$ ,  $2/3$  の粒子の状態関数である。そこで、公式

$$|\mathbf{n}, x\rangle = (-1)^{n_a - n_b} \langle \bar{\mathbf{n}}, x |, \quad \bar{\mathbf{n}} \equiv (n_b, n_a) \quad (4.8)$$

(Takahashi 2008, 2010) を使って、 $\mathbf{x}_\perp$  積分の非積分関数を  $(-1)^{n_a - n_b} \langle \bar{\mathbf{n}}, x | \langle \bar{\mathbf{n}}', x \| \mathbf{m}, x \rangle$  と書き換えると、これは電荷  $-1/3$  と  $-2/3$  の 2 粒子状態を電荷  $-1$  の一粒子状態に射影したものに他ならない。そこで状態積の Clebsch-Gordan 係数による展開公式 (Takahashi 2009)

$$|\mathbf{n}\rangle_q |\mathbf{n}'\rangle_{q'} = \sqrt{\frac{|qq'|}{|q''|}} \frac{B}{4\pi} \sum_{r=0}^{r_{\max}} \sqrt{\frac{(n_a + n_a' - r)!(n_b + n_b' - r)!}{n_a! n_b! n_a'! n_b'!}} \\ \times C_r^{n, n'} |n_a + n_a' - r, n_b + n_b' - r\rangle_{q''} \quad (4.9a)$$

$$r_{\max} = \min(n_a + n_a', n_b + n_b') \quad (4.9b)$$

を用いる。 $(q'' = q + q')$ 。各状態関数の指標  $q$  などは、同じ符号の電荷  $q$  等の粒子の DHO 関数である。座標  $\mathbf{x}$  は書かないことにする)、(4.7) の  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  に関する和と  $\mathbf{x}_\perp$  に関する積分の部分は次のようになる (補足 C を参照):

$$\sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left| \int d\mathbf{x}_\perp \langle \mathbf{n}, x | \mathbf{n}', x \rangle | \mathbf{m}, x \rangle \right|^2 \quad (4.10a)$$

$$= \frac{|qq'|}{|q''|} \frac{B}{4\pi} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}_b} \frac{m_a! m_b!}{n_a! n_b! n_a'! n_b'!} (C_{n_a+n_b', n_a}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'})^2 \Big|_{n_a'=n_a-n_b+n_b'+m_b-m_a}$$

$$0 \leq n_a + n_b' - m_a \leq r_{\max} = \min(n_a + n_b', n_b + n_a') \quad (4.10b)$$

我々は  $\text{Im} \Pi^{(q)}$  の虚部を求めたいので、前節と同じ理由で  $n_a = n_b' = 0$  の項だけを残す。すると (4.10b) より

$$m_a = 0 \quad (4.11)$$

(W ボソンは最低 Landau レベルにある) なので、CG 係数で必要なのは  $C_0^{0, n_b, 0, n_a'}$  である。これは Takahashi (2009) で与えた公式を用いると

$$C_0^{0, n_b, 0, n_a'} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n_b}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n_a'}{2}} \quad (4.12)$$

となる。結局 (4.10) は

$$\sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left| \int d\mathbf{x}_\perp \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_\perp | \mathbf{n}', \mathbf{x}_\perp \rangle | \mathbf{m}, \mathbf{x}_\perp \rangle \right|^2 = \frac{2e}{9} \frac{B}{4\pi} \sum_{n_b} \frac{m_b!}{n_b! n_a'!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_b} \left(\frac{2}{3}\right)^{n_a'} \delta_{n_a', -n_b+m_b} = \frac{eB}{18\pi} \quad (4.13)$$

となるので、これを (4.7) に代入し (3.15)～(3.17) の結果を用いて

$$\text{Im} \Pi^{(q)} = \delta_{m_a, 0} \frac{g^2}{9} \left(\frac{m_w}{e} f\right)^2 \sum_{ij} |V_{ij}|^2 \frac{\theta(\omega - M_{d,ii} - M_{u,jj})}{4\omega^2} \sqrt{(\omega^2 - M_{d,ii}^2 - M_{u,jj}^2)^2 - 4M_{d,ii}^2 - M_{u,jj}^2} \quad (4.14)$$

(4.14) の導出については補足 D を参照されたい。  $m_i \sim 2m_w$  のトップクォークは (4.14) に寄与しないので、 $i$  については  $d$  と  $s$  と  $b, j$  については  $u$  と  $c$  に関する和をとる。これらのクォークは  $\omega$  に比べて非常に小さくすべて等しい質量  $m_q$  を持つとして、(4.14) の根号の中の質量項を無視すると、 $\sum_{ij} |V_{ij}|^2 = 2$  および色数  $N_c = 3$  を考慮し

$$\text{Im} \Pi^{(q)} \approx \left(\frac{m_w^2}{4e^2} \frac{2\pi}{h_0}\right) \delta_{m_a, 0} N_c \frac{g^2 h_0}{9\pi} f^2 \theta(\omega - 2m_q) \quad (4.15)$$

を得る。因子  $\delta_{m_a, 0}$  は、強磁場の下では中間状態のクォークは二つとも最低 Landau レベルにあることによる。

## 5. 力学系

2 次の摂動で、不安定モードの虚部は (3.22a) と (4.15) の和である。これを、Takahashi (2010) で得た有効作用に加えると、全有効作用が得られる。話を簡単にするために、Takahashi (2010) と同様に Landau 量子数  $m_a = 0$ 、角運動量  $l = 0$  の場合に限ると

$$S_{\text{eff}}^{(0,0)} = \int dt \left[ \dot{f}^2 - d_M(\omega) |f|^2 - d_1 h |f|^2 - d_2 h^2 |f|^2 - \frac{d_3}{2} |f|^4 + \frac{1}{8} \dot{h}^2 - \frac{h_0}{4} h^2 \right] \quad (5.1a)$$

$$d_M(\omega) = \frac{2}{h_0} - 2 - i \frac{g^2}{9\pi} h_0 \left( N_c \theta(\omega - 2m_q) + \frac{9}{2} N_g \eta^2 \omega^2 H^{(0)}(\eta^2 \omega^2) \right) \quad (5.1b)$$

$$d_1 = -2c_1 + 4sc_2, \quad d_2 = c_3, \quad d_3 = c_4 \frac{G}{e_W^2} \quad (5.1c)$$

ドットはスケールされた無次元時間  $m_W \sqrt{h_0/2} t = \sqrt{eB_0/2} t \equiv \tau$  に関する微分を表す。 $B_0$  は初めに存在した一様外部磁場である。 $l$  は W ボソンの角運動量,  $e_W$  は W ボソンの電荷,  $s=1$  は W ボソンのスピンである。関数  $H^{(0)}(x)$  は (3.22b) で, 定数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  の値は Takahashi (2010) で与えてある。Weinberg-Salam 理論では,  $g^2 = (e_W/\sin\theta_W)^2 \approx (4\pi/137)/0.232 \approx 0.395$  および  $G = g^2/2$  である。

(5.1b) より,  $h_0 > 1$  すなわち  $eB_0$  が  $m_W^2$  を超えると系は必ず不安定になるのは前に述べた通りである。加えて, 相互作用による質量項  $d_M(\omega)$  の虚部の存在が, W 場の減衰という新たな不安定性の原因となる。このとき, (5.1a) に変分原理を適用して運動方程式を導くことはできない。(無理に変分法を適用すると,  $f$  と  $f^*$  の運動方程式が相互に矛盾することが容易に確かめられる。) 時間反転不変性が破れるからである。したがって,  $d_M(\omega)$  の虚部は, 散逸効果をもたらす項に焼き直すのが適当である。そのために, まず (5.1a) において単純に  $f^*$  と  $h$  に関する変分を取って運動方程式

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + i \text{Im} d_M(\omega) \right) f = -\text{Re} d_M f - d_1 h f - d_2 h^2 f - d_3 |f|^2 f \quad (5.2a)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} h = -4d_1 |f|^2 - 8d_2 h |f|^2 - 2h_0 h \quad (5.2b)$$

を書き下す。 $O(g^2)$  の量

$$\bar{\Gamma} = -\text{Im} d_M(\omega)/(4\bar{\omega}) \quad (\bar{\omega} \equiv \omega/(m_W \sqrt{h_0/2})) \quad (5.3)$$

を用いて  $f$  の時間依存性を

$$f \propto e^{-(i\bar{\omega} - \bar{\Gamma})\tau} \quad (\bar{\omega}, \bar{\Gamma} \text{ はともに実数, } \bar{\omega} > 0) \quad (5.4)$$

のように仮定すると, (5.2a) の左辺は  $O(g^2)$  までで

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + i \text{Im} d_M(\omega) \right) f = \left( \frac{d}{d\tau} - \frac{\text{Im} d_M(\omega)}{2\bar{\omega}} \right)^2 f \quad (5.5)$$

と書けることに注意し, (5.2a) をさらに次のように書き換える:

$$\ddot{f} = \frac{\text{Im} d_M(\omega)}{\bar{\omega}} \dot{f} - \text{Re} d_M f - d_1 h f - d_2 h^2 f - d_3 |f|^2 f \quad (5.6)$$

(5.5) の右辺から生じる  $(\text{Im} d_M(\omega)/(2\bar{\omega}))^2$  に比例する項は  $O(g^4)$  なので (5.6) では落として

いる。 $\text{Im}d_M(\omega) \leq 0$  (等号は  $\omega = 0$  のとき) であるから, (5.6) はわれわれが期待したように  $W$  崩壊による散逸効果を取り入れた運動方程式になっている。これに (5.2b) を加えたものが求める力学系である。

運動方程式 (5.6) では,  $f$  の実部と虚部は一見独立に変動するように見える。しかし実角振動数  $\omega$  が散逸項に現れており, ここを通して実部と虚部が結合する。事実, 上で仮定した  $f$  の時間依存性に対し,  $d\omega/dt$  が十分小さいなら

$$\omega = i(f^* \dot{f} - \dot{f}^* f) / 2 |f|^2 = (\text{Re}(\dot{f}) \text{Im}(f) - \text{Re}(f) \text{Im}(\dot{f})) / |f|^2 \quad (5.7)$$

が成り立つ。

$\omega = 0$  の時は仮定した  $W$  場の配位は電荷をもたないのでレプトン反レプトン対あるいはクォーク反クォーク対に崩壊できないはずである。 $\omega = 0$  は  $f$  の位相に時間変化がないことを意味するので (5.1b) より  $\text{Im}d_M(\omega) = 0$  となり, 事実, 散逸はなく, 前論文 (Takahashi 2010) の系を再現する。次節で, われわれは条件 (5.7) のもとで (5.2b) と (5.6) を解く。

## 6. 力学系の数値解

前節で, 散逸効果が表れるのは  $\omega \neq 0$ , すなわち  $f$  の実部と虚部およびそれらの時間微分がゼロでないことが必要であることを見た。前論文 (Takahashi 2010) では保存系を扱ったが, そこでは  $f$  を実数としたので, これは実は前節の散逸項が 0 であることに相当する。すなわち, 前論文の系は, 本論文で扱う系の特殊な場合であった。

前論文では, 外部パラメータとして電弱標準理論の結合定数と  $h_0 = 1.01$ , 初期条件を  $f = 0.1$ ,  $\dot{f} = h = \dot{h} = 0$  とした場合を詳しく調べた。これを基本系とし, この節では基本系からわずかにずれた初期条件で  $\omega \neq 0$  のものを選んだ時の系の振る舞いを調べる。(5.1b) に現れるクォークの質量は  $2\bar{m}_q \equiv 2m_q / (m_W \sqrt{h_0/2}) = 10^{-4}$  と取ることにする。位相の時間依存性の効果を見やすくするために,

$$f = A e^{-i\phi} \quad (6.1)$$

と  $f$  の振幅と位相を分離する。 $A$  と  $\phi$  はともに実数である。このとき  $\phi$  の時間微分が  $\omega$  で,  $\ln A$  の時間微分が  $-\Gamma \equiv -\bar{\Gamma} m_W \sqrt{h_0/2}$  である。(5.6) からそれらの方程式を

$$\dot{A} = \bar{\omega}^2 A + \frac{\text{Im}d_M(\omega)}{\bar{\omega}} \dot{A} - (\text{Re}d_M + d_1 h + d_2 h^2 + d_3 A^2) A \quad (6.2a)$$

$$\dot{\bar{\omega}} = -2\bar{\omega} \frac{\dot{A}}{A} + \text{Im}d_M(\omega) \quad (6.2b)$$

と導いておく。ここで  $\dot{\phi} = \bar{\omega} = \omega / (m_w \sqrt{\hbar_0/2})$  を用いている。(6.2b) より

$$\frac{d}{dt} \ln(\bar{\omega} A^2) = \frac{\text{Im} d_M}{\omega} \quad (6.3)$$

が成り立つ。 $\omega > 0$  であればこの右辺は負である。他方、左辺は W 場のエネルギー（の対数）であり、(6.3) は初めに  $\omega > 0$  であれば W のエネルギーは減り続けることを表す。

微分方程式は、Bulirsch - Stoer 法 (Stoer and Bulirsch 1996) を用いて解くことにする。その利点については高橋 2010 を参照されたい。(保存系の場合は、軌道がエネルギー一定の超面上にあるべきという制約を用いて数値解の誤差を補正する考え方があるが、これは非保存系では成り立たない。そもそも、定エネルギー面のどこに真の解があるかはわからない。これに対し、Bulirsch - Stoer 法では、制約のあるなしにかかわらず、解が滑らかなときは例えば Runge-Kutta 法よりも正確に解を求めることができることが知られている。前論文 (Takahashi 2009) では、われわれのモデルについて、Bulirsch-Stoer 法が Runge-Kutta 法よりもすぐれていることを確かめている。) 外部磁場を臨界磁場より僅かに大きい  $h_0 = 1.01$  とし、まず、 $\bar{\omega}$  が小さい場合の例として、初期条件

$$A = 0.1, \dot{A} = 0, \bar{\omega} = 0.01 \quad (6.4)$$

に対する  $0 \leq t \leq 8000$  での  $A, \bar{\omega}, h$  の時間依存性を図 4 に、Poincaré 断面を図 5 に示す。ただし、結合定数は前論文に従い、ここではまず  $d_3 = 0.2$  という仮想的な値を用いた。なお、 $t = 8000$  は  $8000 \times (\hbar/m_w) \sqrt{2/\hbar_0} = 9.2 \times 10^{-23}$  s に相当する。

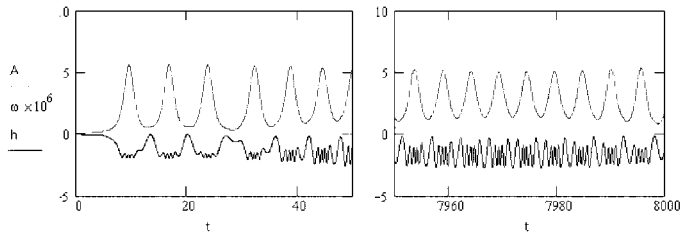


図 4  $A, \bar{\omega}, h$  の時間依存性。左:  $0 \leq t \leq 50$ , 右:  $7950 \leq t \leq 8,000$ 。

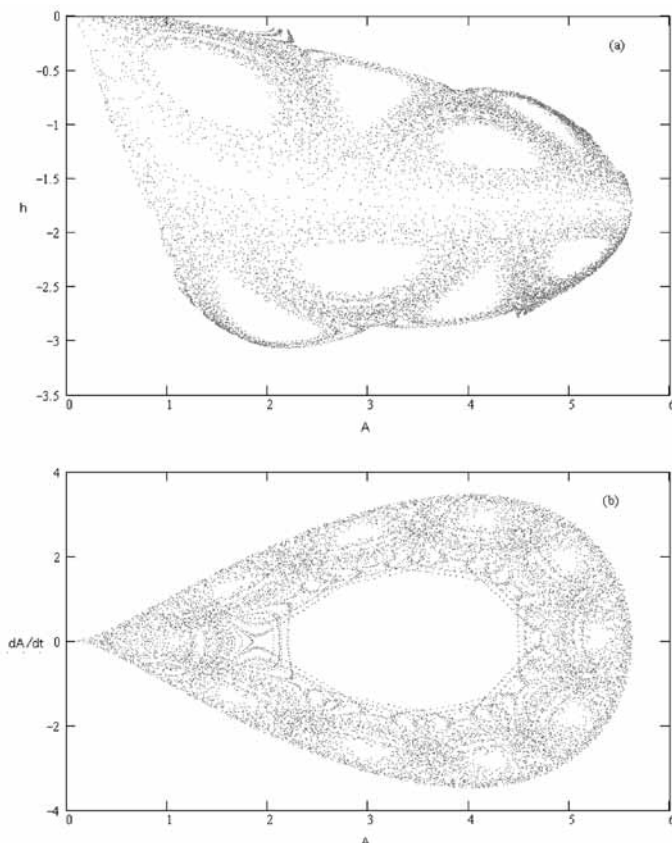


図5  $d_3=0.2$ , 初期条件 (6.4) に対する解の Poincaré 断面。(a):  $(A, h)$  プロット, (b):  $(A, \dot{A})$  プロット。

図4から、磁場がW場より周波数が大きく、短期的にはより不規則に振舞うことが見て取れる。図5に示した Poincaré 断面は、概周期性とカオスが混在していることを示しているように見える。

論文 (Takahashi 2010) の図 1,3 とこれらの図を比較することにより、散逸項があっても、初期の  $\omega$  が小さければ  $0 \leq t \leq 8,000$  という長期にわたって保存系の名残が存続し続けることがわかる。すなわち、図4の時間依存性はカオス的であり、図5の Poincaré 断面のパターンには、ほやけはあるもののそのフラクタル性がかなりはっきり認められる。最大 Liapunov 指数は 0.620 と正の値を取るが、前論文で求めた保存系の場合の 0.847 に比べて 30% 程度小さくなっている。散逸効果は  $\text{Im } f = A \sin \omega t$  として現れるのであるが、 $\omega$  が時間と共に振動しながら減少していることから、物理的な意味を離れて計算時間をさらに長くとっても、おそらくこの傾向は保持されるのであろう。

次に、(5.1c) で与えられる標準電弱理論の  $d_3=1.078$  を用いた時の解の振る舞いを図6に示す。特徴的なことは、エネルギーが急速に減少する時期 (第  $I_a$ ,  $I_b$  期) と緩やかに減少す



る時期（第Ⅱ<sub>a</sub>、Ⅱ<sub>b</sub>期）があることである（図6(c), (d)）。第Ⅰ<sub>a</sub>期では、 $t=0$ から0.34までの間（ $\tau_{1a}=0.34$  秒に直すと $3.9 \times 10^{-27}$ s）に $\bar{\omega}$ は0.01から0近くまで減少する（図6(a)）が振幅 $A$ はほとんど変化しない（図6(b)）。このような変化は、 $\bar{\omega}$ が閾値 $2\bar{m}_q$ を越えたときに散逸効果が不連続に有限となることによる（(5.1b) 参照）。同時に、単位長さあたりのエネルギーは $-1.431 \times 10^{-4}$ から $-1.442 \times 10^{-4}$ まで減少する。その差 $\Delta E_{1a}$ は $\Delta E_{1a}=1.1 \times 10^{-6}$ である。この時期の単位時間および単位長さあたりのエネルギー散逸率は

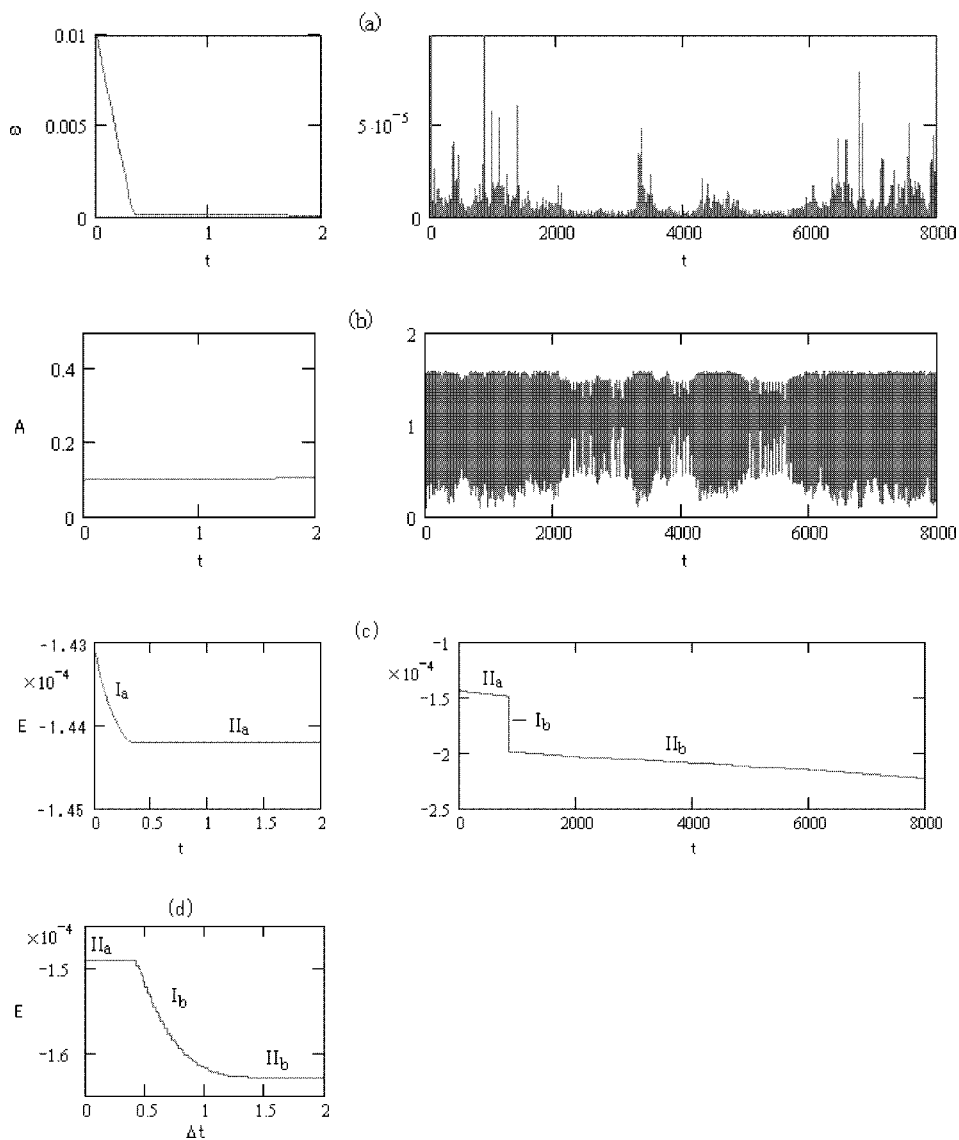


図6 力学系(6.2a), (6.2b), (5.2b)の初期条件(6.4)に対する解。 $h_0=1.01$ 。(a)  $0 \leq t \leq 2$ および $0 \leq t \leq 8,000$ における $\bar{\omega}$ の振る舞い。(b)  $A$ , (c)  $E$ も同様。(d) 第Ⅰ<sub>b</sub>期  $848.39 \leq t=848.39+\Delta t \leq 850.39$ における $E$ の振る舞い。

$$\begin{aligned}
 L_{1a} &= 1.1 \times 10^{-6} \tau_{1a}^{-1} (m_w \sqrt{h_0/2} c^2) \left( \frac{m_w \sqrt{h_0/2} c}{\hbar} \right) \left( \frac{m_w \sqrt{h_0/2} c^2}{\hbar} \right) \\
 &= 1.1 \times 10^{-6} \tau_{1a}^{-1} \times 4.0 \times 10^{45} \left( \frac{1.01}{2} \right)^{3/2} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\
 &= 4.6 \times 10^{39} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる。この式の最初の等号の右辺で、最初の括弧がエネルギー、第二の括弧が $(1/\text{長さ})$ 、最後の括弧が $(1/\text{時間})$ それぞれの単位で、それらの積は $1.4 \times 10^{45} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ある。

$t=848$  近辺で  $E$  は再び急に減少する。この様子を詳しく見たのが図 6(d) である。 $848.82 \leq t \leq 849.57$  の間に  $E$  は  $1.43 \times 10^{-5}$  だけ減少している。 $I_a$  期と同様にして、 $I_b$  期のエネルギー減少率として

$$L_{1b} = 2.6 \times 10^{40} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \tag{6.6}$$

を得る。これは、クォークによる  $W$  の自己エネルギーの虚部に由来するものと考えられる。実際、(5.3) と (5.4) より、 $W$  振幅の減衰の程度は、初期の  $W$  振幅を  $A_0=0.1$  とすると

$$\frac{1}{A_0^2} \frac{dA^2}{dt} \sim -2\Gamma = -2\bar{\Gamma} \cdot \frac{m_w \sqrt{h_0/2} c^2}{\hbar} \tag{6.7}$$

であるが、(5.1b) と (5.3) より典型的な  $\bar{\omega} \sim 1$  に対し  $\bar{\Gamma} \approx 0.395 N_c / (4 \cdot 9\pi) \sim 0.01$  であるので、崩壊による  $W$  エネルギーの減衰は

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_W}{dt} &\sim -2 \cdot 0.01 \cdot A_0^2 \cdot (m_w \sqrt{h_0/2} c^2) \left( \frac{m_w \sqrt{h_0/2} c}{\hbar} \right) \left( \frac{m_w \sqrt{h_0/2} c^2}{\hbar} \right) \\
 &\sim -3 \times 10^{41} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

程度となり、(6.6) と近い（一桁大きい）値である。その一部は磁気系のエネルギーに移るので、大きめの値になるのは当然である。

第 II 期では、 $E$  の変化はより緩やかである。 $II_a$  期 ( $\Delta t_{11a} = 848.8$ ,  $\Delta E_{11a} = 4.8 \times 10^{-6}$ )、 $II_b$  期 ( $\Delta t_{11b} = 7151$ ,  $\Delta E_{11b} = 2.4 \times 10^{-4}$ ) でのその減少率  $L_{11a}$ ,  $L_{11b}$  は

$$L_{11a} = 8.0 \times 10^{36} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, L_{11b} = 4.8 \times 10^{37} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \tag{6.9}$$

と、同一オーダーの値である。この値を  $1.01 \leq h_0 \leq 1.06$  の範囲で調べたが、大きい変化は認められなかった。

$A$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $h$  の時間依存性を詳細に見たのが図 7 である。前論文で扱った保存系と比べると、振動数が低下しているのがわかる。図 8 に示した  $A$  と  $h$  のスペクトル分布にその傾向がよく出ている。すなわち、保存系（論文（Takahashi 2010）参照）に比べ、 $\nu > 1$  の高周波数領域が抑制されている。他方、周波数スペクトルに見るカオス性は、保存系と同様に散逸系でも保たれていることが図 8 からわかる。最大 Liapunov 指数は 0.366 である。

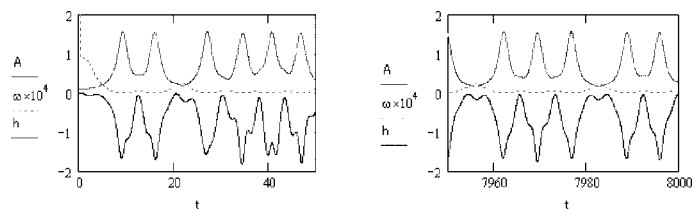


図7  $A$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $h$  の  $7,900 \leq t \leq 8,000$  における時間依存性。左:  $0 \leq t \leq 50$ , 右:  $7,950 \leq t \leq 8,000$ 。

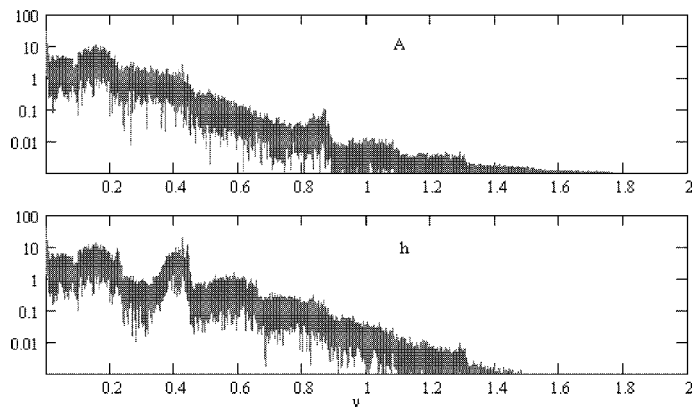


図8  $A$  (上) と  $h$  (下) の周波数スペクトル

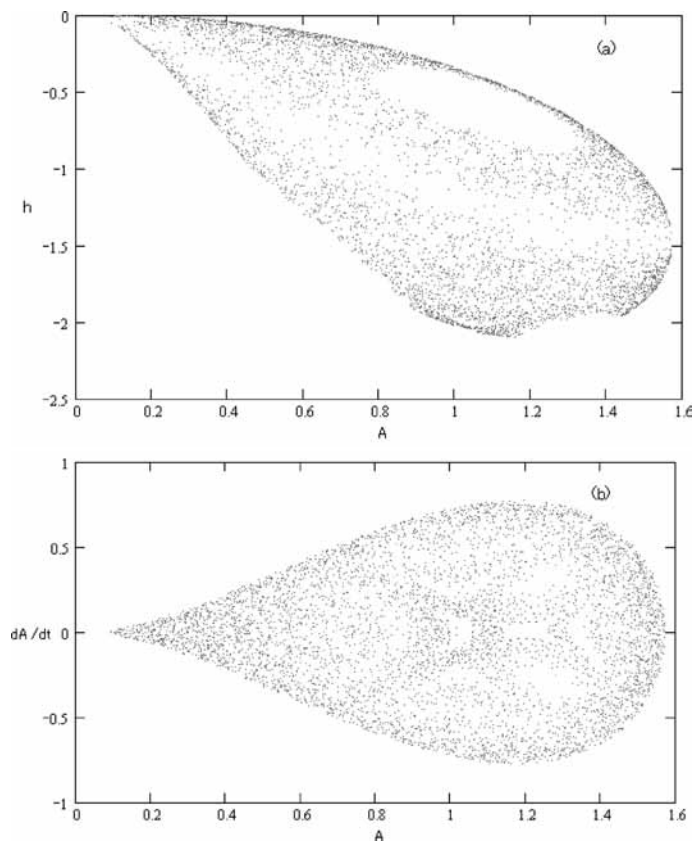


図9  $\dot{h}=0$  における Poincaré 断面。(a)  $(A, h)$  プロット, (b)  $(A, \dot{A})$  プロット。

$\dot{h}=0$  における Poincaré 断面を図 9 に示した。フラクタル性の喪失のようすは、保存系で結合定数が大きい場合に似ている (論文 (Takahashi 2010) 図 9)。フラクタル次元 (情報次元) は  $1.91 \pm 0.27$  と、二次元球面の次元数 2 に近い値になっている。

## 7. 弦の崩壊による空間の加熱

これまでに述べてきたことは、主に力学系の数値解析的な性質についてであった。そのどの部分が現実世界の物理と関係しているだろうか。力学系の基礎は標準電弱理論に置いたので、モデルの内部パラメータの値はそれほど非現実的なものではないだろう。外部パラメータとしては、磁場の強さと計算時間がある。相転移を引き起こす臨界磁場は  $h_0 = eB_0/m_w^2 = 1$  であり、計算に使用した値は 1.01 であった。これはさらに変化させてみる余地はあるだろう。計算時間は最長  $t = 8,000$  まで取ったが、これは既に述べたように約  $10^{-22}$  s に相当する。他方、インフレーション (Guth and Steinhard 1989, 佐藤 2008) を経て電弱相転移が起きる宇宙論的な時刻は、宇宙膨張開始後約  $10^{-10}$  s である (佐藤 2008)。これに比べると、 $t = 8,000 \approx 10^{-22}$  s の時間間隔はまだまだ短いように見える。それでは、弦の成長と崩壊の時間間隔をどの程度にとればいいのか。目安となるのは、初めに存在した磁場が、宇宙の膨張とともに弱まって臨界磁場を下回るようになるまでの時間である。輻射優勢の時代では、宇宙のスケール因子は  $a(t) \sim \sqrt{t}$  で増大するので、外部磁場  $B$  (すなわち磁束密度) は長期的には

$$B(t) = B_0 \frac{t_0}{t} \quad (7.1)$$

のように減衰する。標準的宇宙論では  $t_0 \sim 10^{-10}$  s なので

$$t = h_0 t_0 \quad (7.2)$$

のときに磁場は臨界磁場より小さくなり、電弱弦は消滅する。したがって、電弱弦の継続時間  $\Delta t_w$  はたかだか

$$\Delta t_w = (h_0 - 1) t_0 \quad (7.3)$$

である。たとえば  $h_0 = 1.01$  では、これは約  $10^{-12}$  s に相当する。これを越えると磁場弦そのものが存在できないのである。つまり、物理的に意味のある計算時間としては (7.3) で与えられるものをとるべきである。これは、われわれの計算時間  $8000 \sim 10^{-22}$  s に比べてはるかに長い。このときに問題となるのは IIb 期のエネルギー放出率で、前節であげた  $h_0 = 1.01$  の例では (6.9) で与えられる。その場合

$$E_{\text{Iib}} \approx L_{\text{Iib}} \Delta t \omega \quad (7.1)$$

のエネルギーが放出されることになる。これは ( $A_0 = 0.1$ ,  $h_0 = 1.01$  に対し)  $\sim 10^{25} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1}$  である。

電弱弦の半径は  $r_s = 2/\sqrt{eB} = 2\hbar/(cm_w\sqrt{h_0})$  (前論文 (7) 式を見よ。ここでは Planck 定数と光速度定数を復活させている。) 程度である。第 2 種超伝導体の Abrikosov 格子に近い配列が形成されるとすると、弦の数密度は単位面積当たり

$$n_s \sim \frac{1}{4r_s^2} = \frac{m_w^2 h_0 c^2}{4\hbar^2} \quad (7.2)$$

としてよい。したがって、Iib 期の中に、単位体積当たりの放出エネルギーは

$$\epsilon_{\text{Iib}} = n_s E_{\text{Iib}} \sim 4.1 \times 10^{59} h_0 \left( \frac{E_{\text{Iib}}}{10^{25} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1}} \right) \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-3} \quad (7.3)$$

となる。弦崩壊によって生成される粒子 — 軽いレプトンと軽いクォーク — は相対論的に振る舞うので、このエネルギーによって、空間は ‘加熱’ されることになる。直ちに熱平衡状態になるわけではないが、直観的な理解のために、熱平衡状態のどのような温度に対応するかを見てみよう。それ以前に熱粒子が存在していなければ、熱平衡における対応する温度を  $T_{\text{Iib}}$  とすると、エネルギー密度に関する Stefan-Boltzmann 則

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g(T) T^4 \quad (7.4)$$

の  $\rho_{\text{rad}}$  を  $\epsilon_{\text{Iib}}$  に等しいとおいて

$$T_{\text{Iib}} \sim \left( \frac{4,100}{g(T)} h_0 \left( \frac{E_{\text{Iib}}}{10^{25} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1}} \right) \right)^{1/4} \times 10^{14} \text{ K} \quad (7.5)$$

$g(T)$  はスピンの自由度も考慮した相対論的粒子の種類数 (たとえば光子の種類は 2 とする) である。クォーク-ハドロン相転移後の話なので  $g(T) \sim 10$ 、また  $E_{\text{Iib}} \sim 10^{25} \text{ GeV} \cdot \text{m}^{-1}$  として  $T_{\text{Iib}} \sim 5 \times 10^{14} \text{ K}$  となる。これは、初期宇宙が真空のエネルギー (ダークエネルギー) 優勢ではなく放射優勢であるとしたときに期待される宇宙の温度と同程度である。もちろん、この温度は初めに仮定した電弱弦の強度に依存する。より強い弦はより高い温度を生成するであろう。

## 8. まとめ

臨界磁場を超える磁場の中で形成される電弱弦の時間変化における散逸効果を、荷電粒子の有限磁場伝搬関数を用いて見積もった。有限磁場伝搬関数は、高橋 (2006, 2009) で構成された DHO 表示によるもので、これによりそれまでの座標表示のものに比べ計算の見通

しと能率をかなり向上させることができた。

散逸効果は、不安定 W 場とレプトン・クォークとの結合による W 粒子の自己エネルギーの虚部として現れる。本論では、これを結合定数の 2 次の次数で解析的に厳密に計算し、数値計算はその結果にほぼ従って行った。‘ほぼ’の意味は、実際の数値計算では、レプトン間の、あるいはクォーク間の質量差を無視したということである。この差を考慮することに本質的な困難はないのであるが、考えている磁場のエネルギーがこれらの粒子の質量に比べて非常に大きいので、そのような計算上の精密化は計算結果に実質的な影響をもたらさない。

力学系は、W 場の振幅と位相、磁場の強さおよびそれらの時間微分の間関係として表された。結果をまとめると次ようになる。(1) 運動はカオス的である。(2) Liapunov 指数は保存系の場合に比べ小さくなる。(3) 不安定モードの時間発展は、保存系の時に見られた特徴的フラクタルパターンははやけるものの、保存系の場合のパターンを長期にわたってほぼ保つ。(4) Poincaré 断面のフラクタル次元数は保存系の場合よりも 2 に近い。(5) 時間発展の初期、 $1/m_w$  のオーダーの時間で、電弱弦からの物質生成による最初のエネルギー放出がなされる。その後は、 $10^{-10} \cdot (h_0 - 1)$  秒という長期にわたって弱いエネルギー放出がなされる (図 10 参照)。(6) 電弱弦の生成と崩壊は、宇宙の再加熱というかたちで宇宙の歴史に影響を与える。再加熱による温度は、電弱弦が生成される直前の宇宙の温度と同程度かそれ以上にまで達しうる。



図 10 真空中における電弱弦の物質化。強い外部磁場が乱雑な向きを持っていて、電弱弦が乱雑に生成している様子を描いている。矢印はクォーク-反クォーク対 (またはメソン)、電子-反ニュートリノ対などの生成を表す。

#### 補足 A 負の電荷 $-e$ を持つ粒子の量子状態と伝搬関数

負の電荷をもつ電子や d-クォークの記述形式をまとめる。電子の場合、電荷は  $-e$  で調和

振動子モードの梯子演算子は

$$a = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{eB}} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \sqrt{eB} \zeta^* \right), \quad a^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{eB}} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} - \sqrt{eB} \zeta \right) \quad (\text{A1a})$$

$$b = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{eB}} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} + \sqrt{eB} \zeta^* \right), \quad b^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{eB}} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \sqrt{eB} \zeta \right) \quad (\text{A1b})$$

となる。ここで  $\zeta = (x + iy)/2$ 。d-クォークでは、(A1) の  $e$  を  $e/3$  で置き換える。 $a|0\rangle = b|0\rangle = 0$  で定義される規格化された基底状態  $|0\rangle$ —その座標表示は  $\sqrt{eB/(2\pi)} e^{-eB\zeta^*\zeta}$  (d-クォークでは  $\sqrt{eB/(6\pi)} e^{-(eB/3)B\zeta^*\zeta}$ )—の上に、励起状態を次のようにしてつくることができる：

$$|\mathbf{n}, \mathbf{x}_\perp\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_a! n_b!}} a^{\dagger n_a} b^{\dagger n_b} |0\rangle, \quad \mathbf{n} = (n_a, n_b) \quad (\text{A2})$$

左辺の  $\mathbf{x}_\perp$  は横座標  $(x^1, x^2)$  を表す。この状態のエネルギーは量子数  $n_a$  によって、ガイド中心の位置は量子数  $n_b$  によって決まる (Ezawa 2000)。

伝搬関数 (遅延 Green 関数) は次のようにして決定される。自由空間での運動方程式は

$$iD\psi \equiv (i\tilde{\partial} + \sqrt{2eB}\gamma^0 A - m)\psi = 0 \quad (\text{A3})$$

である。ここで  $A$  は次のような行列である：

$$A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a^\dagger & & \\ & & & -a \\ & & -a^\dagger & \end{pmatrix} \quad (\text{A4})$$

$\psi$  の  $t$  および  $z$  依存性を  $e^{-i(p^0 t - P_z z)}$  と仮定すると (A3) は

$$(\tilde{p} \cdot \tilde{\gamma} + \sqrt{2eB} \gamma^0 A - m)\psi = 0 \quad (\text{A5})$$

と表される。この正負エネルギー解は Takahashi (2008) で与えられている。それらを用いて場の演算子  $\psi$  を展開し、伝搬関数  $S_F(x', x)$  を次のように定義する：

$$(S_F(x', x) \gamma^0)_{\beta\alpha} \equiv -i \langle 0 | \phi_\beta(x') \phi_\alpha^\dagger(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) + i \langle 0 | \phi_\alpha^\dagger(x) \phi_\beta(x') | 0 \rangle \theta(t - t'). \quad (\text{A6})$$

これが Green 関数であることは次の性質からわかる：

$$iD_{x', \rho\beta}(S_F(x', x) \gamma^0)_{\beta\alpha} = \gamma^0_{\rho\alpha} \delta^{(4)}(x - x') \quad (\text{A7})$$

ここで  $S_F(x', x)$  の具体的な形を求める。(A6) の右辺を直接変形して

$$\begin{aligned}
 (S_F(x', x)\gamma^0)_{\beta\alpha} &= -i\sum_{\mathbf{n},s}\int\frac{dp_z}{2\pi}\frac{M}{E}[u_{\mathbf{n},s,\beta}(x_{\perp}', p_z)u_{\mathbf{n},s,\alpha}(x_{\perp}, p_z)^*e^{-i\mathbf{p}(\bar{x}'-\bar{x})}\theta(t'-t) \\
 &\quad -v_{\mathbf{n},s,\alpha}(x_{\perp}, p_z)^*v_{\mathbf{n},s,\beta}(x_{\perp}', p_z)e^{i\mathbf{p}(\bar{x}'-\bar{x})}\theta(t'-t)] \\
 &= -i\sum_{\mathbf{n}}\int\frac{dp_z}{2\pi}\frac{1}{2E}\frac{i}{2\pi}\int d\omega\left[\frac{1}{\omega-E+i\epsilon}(E\gamma^0-p_z\gamma^3+\sqrt{2eBn_a}\gamma^1+m\mathbf{1})_{\mathbf{n},\beta,\alpha,x'}\theta(t-t') \right. \\
 &\quad \left. +\frac{1}{\omega+E-i\epsilon}(E\gamma^0+p_z\gamma^3-\sqrt{2eBn_a}\gamma^1-m\mathbf{1})_{\mathbf{n},\beta,\alpha,x'}\theta(t-t')\right]\gamma^0e^{ip_z(z'-z)}e^{-i\omega(t'-t)} \\
 &= \sum_{\mathbf{n}}\int\frac{dp_z}{2\pi}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{\omega^2-E^2+i\epsilon}(\omega\gamma^0-p_z\gamma^3+\sqrt{2eBn_a}\gamma^1+m\mathbf{1})_{\mathbf{n},\beta,\alpha,x'}\gamma^0\alpha_a e^{ip_z(z'-z)}e^{-i\omega(t'-t)}
 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $u_{\mathbf{n},s}(x_{\perp}, p_z)$  と  $v_{\mathbf{n},s}(x_{\perp}, p_z)$  は、それぞれ正および負のエネルギーを持つ (A5) の解である。したがって、負の電荷を持つ粒子の伝搬関数は

$$S_F(x', x) = \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d\omega dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega^2 - E^2 + i\epsilon} (\omega\gamma^0 - p_z\gamma^3 + \sqrt{2eBn_a}\gamma^1 + m\mathbf{1})_{\mathbf{n},x'} e^{-i\omega(t'-t) + ip_z(z'-z)} \tag{A8}$$

である。ここで、伝搬関数の分子に現れる  $\gamma$ -行列と単位行列は次のように表わされる (以下での  $\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^{\mu}$  は本文での  $(\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^{\mu})^{-1}$  のことである) :

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^0 = \begin{pmatrix} & |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & \\ & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \end{pmatrix} \tag{A9a}$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^1 = \begin{pmatrix} & & -|\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \\ |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & \end{pmatrix} \tag{A9b}$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^2 = i \begin{pmatrix} & & & |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & -|\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & & \\ |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \end{pmatrix} \tag{A9c}$$



$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^3 = \begin{pmatrix} & & -|\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \\ & & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \end{pmatrix} \quad (\text{A9d})$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^5 = \begin{pmatrix} |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \\ & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & & \\ & & -|\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & & & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \end{pmatrix} \quad (\text{A9e})$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n},x,x'} = \begin{pmatrix} |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & & & \\ & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & & \\ & & |\mathbf{n}-1_a, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_a, x'| & \\ & & & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \end{pmatrix} \quad (\text{A9f})$$

ここで、明示していない行列要素は0である。また $\mathbf{n}-1_a \equiv (n_a-1, n_b)$ である。

### 補足 B 正の電荷 $e$ を持つ粒子の量子状態と伝搬関数

陽子や  $u$ -クォークのような正の電荷を持つ粒子の記述形式をまとめる。調和振動子状態をつくる梯子演算子は、陽子では電子と同じで、 $u$ -クォークに対しては (A1), (A2) の  $e$  を  $2e/3$  で置き換える。規格化された励起状態を (A2) のように表すが、このとき  $n_a$  と  $n_b$  の意味が交換される。すなわち、Landau レベルは  $n_b$  で指定され、ガイド中心が  $n_a$  で指定される。

伝搬関数は (A8) の形を持つが、その  $\gamma$ -行列等は、 $|\mathbf{n}, x\rangle$  は  $|\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b \equiv (n_a, n_b-1)$  に、 $|\mathbf{n}-1_a, x\rangle$  は  $|\mathbf{n}, x\rangle$  に置き換えられる。例えば (以下での  $\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^{\mu}$  は本文での  $(\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^{\mu})^+$  のことである)

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^0 = \left[ \begin{array}{cc} & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & |\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \\ & |\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \end{array} \right] \quad (\text{B1a})$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^1 = \left[ \begin{array}{cc} & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ & -|\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ |\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \end{array} \right] \quad (\text{B1b})$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^2 = i \left[ \begin{array}{cc} & |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ & -|\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ |\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \end{array} \right] \quad (\text{B1c})$$

$$\gamma_{\mathbf{n},x,x'}^3 = \left[ \begin{array}{cc} & -|\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| \\ & |\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \\ |\mathbf{n}, x\rangle\langle\mathbf{n}, x'| & \\ & -|\mathbf{n}-1_b, x\rangle\langle\mathbf{n}-1_b, x'| \end{array} \right] \quad (\text{B1d})$$

という風である。

補足 C 式 (4.10) の導出

求めるべき振幅を、公式 (4.8) を用いて次のように書き換える：

$$\sum_{\mathbf{n},\mathbf{n}'} \int d\mathbf{x}_\perp |\langle\mathbf{n}, x|\mathbf{n}', x\rangle\langle\mathbf{m}, x|^2 = \sum_{\mathbf{n},\mathbf{n}'} \int d\mathbf{x}_\perp |\langle\mathbf{n}, x|\langle\bar{\mathbf{n}}', x|\mathbf{m}, x\rangle|^2 \quad (\text{C1})$$

この式の右辺の  $\langle\mathbf{n}, x|\bar{\mathbf{n}}', x|$  に、状態積の展開公式 (4.9) を適用し状態  $|\mathbf{m}, x\rangle$  との内積をとると求める結果を得る。すなわち

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left| \int d\mathbf{x}_\perp \langle \mathbf{n}, x \parallel \mathbf{n}', x \rangle | \mathbf{m}, x \rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left| \sqrt{\frac{qq'}{|q''|}} \frac{B}{4\pi} \sum_{r=0}^{r_{\max}} \sqrt{\frac{(n_a + n_b' - r)!(n_b + n_a' - r)!}{n_a! n_b! n_a'! n_b'!}} C_r^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \delta_{n_a, n_b' - r, m_a} \delta_{n_b, n_a' - r, m_b} \right|^2 \\
 &= \frac{|qq'|}{|q''|} \frac{B}{4\pi} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left| \frac{m_a! m_b!}{n_a! n_b! n_a'! n_b'!} (C_{n_a, n_b' - m_a}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'})^2 \right|_{n_a' = n_a - n_b + n_b', m_b - m_a} \quad (C2)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq n_a + n_b' - m_a \leq r_{\max} = \min(n_a + n_b', n_b + n_a') \quad (C3)$$

ここで  $\langle n_a + n_b' - r, n_b + n_a' - r | \mathbf{m} \rangle = \delta_{n_a, n_b' - r, m_a} \delta_{n_b, n_a' - r, m_b}$  を使った。

#### 補足 D 式 (4.14) の導出

まず, 2 次の摂動公式により

$$\text{Im} \Pi^{(q)} = \delta_{m_a, 0} \frac{g^2}{9} \left( \frac{m_w f}{e} \right)^2 \text{Retr} \int \frac{d^2 \tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{q^0 + q_z}{\tilde{q}^2 - M_d^2 + i\epsilon} V^\dagger \frac{q^0 - \omega - q_z}{(q^0 - \omega)^2 - q_z^2 - M_u^2 + i\epsilon} V$$

である。 $M_d$  と  $M_u$  が対角行列であることより, 右辺は

$$\delta_{m_a, 0} \frac{g^2}{9} \left( \frac{m_w f}{e} \right)^2 \sum_{ij} \text{Re} \int \frac{d^2 \tilde{q}}{(2\pi)^2} \frac{q^0 + q_z}{\tilde{q}^2 - M_{d,ii}^2 + i\epsilon} |V_{ij}|^2 \frac{q^0 - \omega - q_z}{(q^0 - \omega)^2 - q_z^2 - M_{u,jj}^2 + i\epsilon}$$

となる。 $\tilde{q}$  積分は正則化して

$$\delta_{m_a, 0} \frac{g^2}{9} \left( \frac{m_w f}{e} \right)^2 \sum_{ij} |V_{ij}|^2 \text{Re} \frac{i}{4\pi} \int_0^1 du \ln(-u(1-u)\omega^2 + uM_{d,ii}^2 + (1-u)M_{u,jj}^2 - i\epsilon)$$

この式は, Feynman 変数  $u$  が

$$\frac{1}{2\omega^2} [\omega^2 + M_u^2 - M_d^2 - D] < u < \frac{1}{2\omega^2} [\omega^2 + M_u^2 - M_d^2 + \sqrt{D}]$$

$$D \equiv (\omega^2 - M_u^2 - M_d^2)^2 - 4M_u^2 M_d^2$$

にあるときに実部が非ゼロであることに注意すると,  $u$  積分から (4.14) の最後の式を得る。

#### 参考文献

- Ambjørn J and Olesen P, 1989 *Nucl. Phys.* **B315** 606 ; 1990 *ibid.* **B330** 193.  
 Arnold V J, 1964 *Sov. Math. Dokl.* **5** 581.  
 Berry M V, 1978 in *Topics in Nonlinear Dynamics* ((ed.) Jorna S, Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **46**)  
 Enqvist K and Olesen P, 1994 *Phys. Lett.* **B319** 195.  
 Ezawa Z F, 2000 *Quantum Hall Effect* (World Scientific) p160.  
 Fermi E., Pasta J. and Ulam S. 1955, *Los Alamos Scientific Laboratory report* LA-1940.  
 Fujimoto Y and Fukuyama T, 1983 *Z. Phys.* **C 19** 11.  
 Guth A and Steinhard P, 1989 *The inflationary universe in New Physics* (Cambridge University Press, Cambridge) p34.  
 Itzykson C and Zuber J-B, 1980 *Quantum Field Theory* Chap. 8 (McGraw-Hill, New York)  
 Kobayashi M and Maskawa T, 1972 *Prog. Theor. Phys.* **49** 652.  
 Matinyan S G and Savvidy G K, 1978 *Nucl. Phys.* **B134** 539.

- Particle Data Group, 2008 *Phys. Lett.* **B667** 386..
- Salam A, 1968 in *Elementary Particle Theory* ed. Svartholm (Almqvist and Forlag).
- Savvidy G K, 1977 *Phys. Lett.* **B71** 133.
- Skalozub V V, 1983 *Sov. J. Nucl. Phys.* **37** 283.
- Skalozub V V, 1985 *Sov. J. Nucl. Phys.* **45** 665 ; 1986 *ibid.* **43** 1045.
- Sogut K, Havare A and Acikgoz L, 2002 *J. Math. Phys.* **43** 3952.
- Stoer J and Bulirsch R, 1996 *Introduction to numerical analysis*, third edition, (Springer, New York).
- Takahashi K, 2006 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32** 1131.
- Takahashi K, 2008 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **35** 035002.
- Takahashi K, 2009 *Faculty of Liberal Arts Review*, Tohoku Gakuin Univ. **154** 21  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo\\_154/index.html](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo_154/index.html)
- Takahashi K, 2009 *Faculty of Liberal Arts Review*, Tohoku Gakuin Univ. **155** 109  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo\\_155/index.html](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo_155/index.html)
- Takahashi K, 2010 *Faculty of Liberal Arts Review*, Tohoku Gakuin Univ. **156** 109  
[http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo\\_156/index.html](http://www.tohoku-gakuin.ac.jp/gakujutsu/kyoyo_156/index.html)
- Weinberg S, 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264.
- 佐藤勝彦 2008, シリーズ現代の天文学 2 宇宙論 I (日本評論社) 第 1 章.